Licence ès sciences mathématiques. Session de juillet 1896. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 505-535

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__505_1>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1896. — COMPOSITIONS.

Nancy.

Analyse. — I. *On considère les fonctions analytiques uniformes qui n'admettent d'autres singularités que trois points singuliers isolés* $z=0$. $z=a$, $z=\infty$, *les parties principales correspondantes étant respectivement*

$$\sin\frac{k\pi}{z},\qquad \frac{k-a}{(z-a)^2}-\frac{1}{z-a},\qquad \varphi(z);$$

k *désigne un nombre réel entier,* a *une constante quelconque, et* $\varphi(z)$ *la partie principale de la fonction*

$$\frac{3}{2}z^4\log\frac{z+1}{z-1}$$

envisagée dans le domaine de l'infini, le signe log *indiquant la détermination qui s'annule à l'infini.*

Soit $f(z)$ *celle des fonctions considérées qui est nulle pour* $z=k$:

1° *Former l'expression explicite de* $f(z)$ *et calculer son résidu à l'infini;*

2° *Trouver les périodes de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\,;$$

3° *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{\varphi(z) f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

prise le long d'une circonférence concentrique au point $z = k$ et de rayon aussi petit qu'on voudra.

II. Soit S *la surface définie par les équations*

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

et soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale MW *en un point quelconque* M (u, v) *de cette surface. On pose*

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

$$E' = \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad F' = \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \qquad G' = \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2};$$

calculer, en chaque point M *de la courbe représentée par les équations*

$$u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t):$$

1° *L'angle ϖ que fait sa normale principale avec la direction* MW ;

2° *Son rayon de courbure* R $\left(\textit{on pourra calculer séparément } \frac{\cos\varpi}{R} \textit{ et } \frac{\sin\varpi}{R}\right)$.

Appliquer les formules obtenues à l'hélicoïde gauche

$$x = v\cos u,$$
$$y = v\sin u,$$
$$z = ku.$$

I. Le développement en série, dans le domaine de l'infini, de

$$\frac{3}{2} z^4 \log \frac{z+1}{z-1}$$

donne $\varphi(z) = z + 3z^3$. La fonction $f(z)$ est, à une constante additive près, la somme des trois parties principales, et est déterminée par la condition d'être nulle pour $z = k$, de sorte que l'on a

$$f(z) = \sin\frac{k\pi}{z} + \frac{k-a}{(z-a)^2} - \frac{1}{z-a} + z - k + 3z^3 - 3k^3.$$

Comme les résidus de cette fonction pour les points o et a sont $k\pi$ et -1, son résidu à l'infini est $1 - k\pi$, et les périodes de l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ sont $2k\pi^2 i$ et $-2\pi i$.

Comme $\varphi(k)$ n'est pas nul et a la valeur $k + 2k^3$, le résidu de $\frac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)}$ pour $z = k$ est égal à $n(k + 2k^3)$, n désignant l'ordre de multiplicité du zéro $z = k$ de $f(z)$, et l'intégrale proposée de cette fonction est égale à $2n\pi i(k + 3k^3)$.

II. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs de la normale principale et de la binormale à la courbe ; on a

$$\frac{\cos\varpi}{R} = \frac{1}{R}(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) = a\frac{d^2x}{ds^2} + b\frac{d^2y}{ds^2} + c\frac{d^2z}{ds^2},$$

et l'on trouve immédiatement

$$\frac{\cos\varpi}{R} = \frac{E'du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2};$$

on a, d'autre part,

$$\frac{\sin\varpi}{R} = \frac{1}{R}(a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}.$$

En multipliant les deux membres par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

qui a pour valeur $\sqrt{EG - F^2}$, désignant par s', u', v' les dérivées de l'arc s, de u et de v par rapport à t, et posant

$$T = \tfrac{1}{2}(E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2),$$

on trouve

$$\frac{\sin\varpi}{R} = \frac{1}{S'^3\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial u'} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} \\ \frac{\partial T}{\partial v'} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dans le cas de l'hélicoïde, on a

$$F = E' = G' = 0,$$

car les lignes coordonnées sont rectangulaires et sont les lignes asymptotiques de la surface; de plus, $E = v^2 + k^2$, $G = 1$ et $F' = \frac{k}{\sqrt{v^2 + k^2}}$; on en déduit

$$\frac{\cos\varpi}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\sin\varpi}{R}.$$

MÉCANIQUE. — *Un solide rigide homogène de révolution est fixé par un point O de son axe de révolution Oz. Outre la pesanteur, une force dont la fonction des forces est proportionnelle au carré du cosinus de l'angle θ que fait Oz avec la zénithale Oζ est distribuée sur le solide; soit λ le coefficient de proportionnalité de sorte que cette fonction des forces est égale à* $\lambda \cos^2\theta$.

A l'instant initial, après avoir incliné de 60° *sur Oζ l'axe positif Oz sur lequel est situé le centre de gra-*

vité du solide, on imprime à ce solide une rotation initiale autour de cet axe, puis on laisse le corps solide se mouvoir librement autour de son point fixe O.

On suppose que la masse M *du solide, l'accélération* g *due à la pesanteur, le nombre* n *qui mesure sur* Oz *la vitesse angulaire de rotation, la distance* l *du centre de gravité du corps au point* O, *les moments d'inertie, équatorial et axial,* A *et* C *du solide pour le point* O, *sont liés par la relation*

$$3\,\mathrm{MA}\,gl = 2\,\mathrm{C}^2 n^2;$$

on demande d'étudier le mouvement de Oz, *ainsi que le mouvement du solide autour de* Oz *dans les deux cas suivants :*

$$\lambda = \mathrm{M}gl, \qquad \lambda = -\mathrm{M}gl.$$

Dans le deuxième cas, après avoir discuté, on exprimera explicitement en fonction de t, *au moyen des fonctions elliptiques, les trois angles d'Euler* θ, ψ, φ *qui déterminent la position du solide dans l'espace.*

La somme des moments des forces données par rapport à Oz et par rapport à Oζ est nulle; on a trois intégrales premières en prenant :

1° La troisième équation d'Euler qui donne $r = n$;

2° Le théorème des forces vives qui donne, en tenant compte des conditions initiales

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\mathrm{A}(p^2 - q^2) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{A}(\sin^2\theta\psi'^2 + \theta'^2)\\ &= -\mathrm{M}gl(\cos\theta - \cos\theta_0) + \lambda(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0);\end{aligned}$$

3° Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oζ qui fournit, comme dans le cas de la toupie,

$$\mathrm{A}\sin^2\theta\,\psi' + \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0) = 0.$$

En éliminant ψ' entre les deux équations, remplaçant

$\cos\theta_0$ par $\frac{1}{2}$ et $C^2 n^2$ par sa valeur, on obtient l'équation suivante pour déterminer θ :

$$A\theta'^2 = 2\lambda(\cos^2\theta - \tfrac{1}{4}) - 2Mgl(\cos\theta - \tfrac{1}{2}) - \frac{3Mgl(\cos\theta - \frac{1}{2})^2}{2\sin^2\theta},$$

ou, en posant $\cos\theta = u$,

$$\begin{aligned} Au'^2 = {} & 2\lambda(u^2 - \tfrac{1}{4})(1 - u^2) \\ & - 2Mgl(u - \tfrac{1}{2})(1 - u^2) - \tfrac{3}{2}Mgl(u - \tfrac{1}{2})^2. \end{aligned}$$

Premier cas. $\lambda = + Mgl$; l'équation devient

$$u'^2 = -\frac{2Mgl}{A}(u - \tfrac{1}{2})^3(u + \tfrac{1}{2});$$

on peut effectuer l'intégration; en tenant compte des conditions initiales, on a constamment $u = \frac{1}{2}$, et l'angle θ reste égal à 60°; mais alors on a $\psi' = 0$ et $\varphi' = n$; l'axe Oz reste fixe dans l'espace, et le solide tourne autour de cet axe avec une vitesse constante.

Deuxième cas. $\lambda = - Mgl$; on a

$$u'^2 = \frac{2Mgl}{A}(u - \tfrac{1}{2})(u + \tfrac{1}{2})(u^2 + u - \tfrac{9}{4});$$

le dernier trinome restant négatif quand u reste inférieur à 1 en valeur absolue, u variera de $\frac{1}{2}$ à $-\frac{1}{2}$, et θ variera entre 60° et 120°. Les relations

$$\psi' = \frac{Cn}{A}\,\frac{\frac{1}{2} - \cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\varphi' = n - \psi'\cos\theta$$

montrent que ψ varie toujours dans le même sens, ψ' passant par un minimum et un maximum pour $\theta = 60°$ et $\theta = 120°$.

Pour effectuer l'intégration dans ce cas, nous poserons

$$\frac{Mgl}{6A} = m, \qquad u = \frac{1}{2} - \frac{9m}{2x - m},$$

et nous aurons

$$x'^2 = 4x^3 - 117m^2x + 340m^3:$$

par conséquent, x est égal à $\wp(t)$; on a ensuite

$$\psi' = \frac{36 m^{\frac{3}{2}}(2x - m)}{(2x + 17m)(2x - 7m)},$$

$$\varphi' = n - \frac{18 m^{\frac{3}{2}}(2x - 19m)}{(2x + 17m)(2x - 7m)},$$

et l'on est ramené à intégrer des fractions rationnelles simples, ce qui se fait au moyen de la fonction ζ.

Épreuve pratique. Astronomie. — *Le 9 août, la longitude du Soleil, au moment de son passage au méridien de Paris, est*

$$130^\circ 42' 28''.$$

1° *Déterminer son ascension droite et sa déclinaison;*

2° *Déterminer, le même jour, l'heure sidérale du coucher de l'astre. (On ne tiendra pas compte de la variation de ses coordonnées dans l'intervalle.)*

On donne l'obliquité de l'écliptique et la latitude de Paris

$$\omega = 23^\circ 27' 12'', 8,$$
$$\lambda = 48^\circ 50' 47''.$$

Lyon.

Analyse. — *Intégrer*

$$(x+1)^3 y''' + (x+1)^2 y'' - 5(x+1)y' + 8y = x^2 + 1 + \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Tout se réduit à intégrer l'équation sans second membre. Posons $x + 1 = e^t$, d'où, pour un entier positif n quelconque,

$$(x+1)^n \frac{d^n y}{dx^n} = P_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_{ni} \frac{d^i y}{dt^i};$$

avec $P_1 = \dfrac{dy}{dt}$ et $(a_{ni} = \text{const.})$,

$$P_n = \frac{dP_{n-1}}{dt} - (n-1)P_{n-1}.$$

Il viendra ainsi

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 8y = 0,$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4\alpha + 8 = (\alpha - 2)^2(\alpha + 2).$$

On a ainsi un système fondamental d'intégrales

$$e^{2t} = (x+1)^2, \qquad e^{-2t} = (x+1)^{-2}, \qquad te^{2t} = (x+1)^2 \mathrm{L}(x+1).$$

MÉCANIQUE. — *Questions de cours : mouvement d'un point sur une surface ; pression. Mouvement d'un corps solide, homogène, pesant, de révolution, fixé par un point de son axe.*

Grenoble.

ANALYSE. — I. *Calculer le volume compris dans le trièdre des coordonnées positives, entre les faces* $x\mathrm{O}y$, $x\mathrm{O}z$, *les deux surfaces* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $a^2y = bx^2$ *et le plan parallèle à* $y\mathrm{O}z$ *mené par le point de rencontre des traces des deux surfaces sur le plan* $x\mathrm{O}y$.

On a successivement

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a dx \int_0^{b\frac{x^2}{a^2}} c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy \\ &= \frac{bc}{2}\left(\int_0^a \frac{x^3}{a^3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx + \int_0^a \frac{x^2}{a^2}\arc\sin\frac{x}{a}\,dx\right) \\ &= \frac{abc}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4}{45}\right). \end{aligned}$$

II. *Intégration de l'équation*

$$\left(2x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 - 4x = 0.$$

Intégrale générale, et recherche de la solution singulière, en partant, soit de l'intégrale générale, soit de l'équation différentielle proposée.

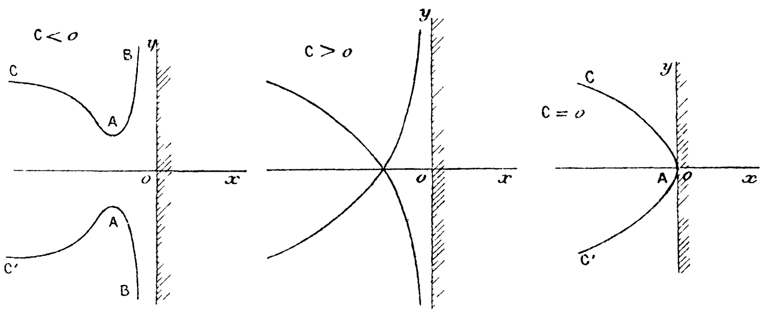
L'équation, mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \pm \frac{1}{\sqrt{-x}},$$

est immédiatement intégrable; son intégrale générale est donnée par

$$(1) \qquad xy^2 + (x+c)^2 = 0$$

Suivant les valeurs attribuées à la constante c, on a les formes suivantes pour les courbes intégrales :



Pour la *solution singulière,* en partant de l'intégrale générale, et posant $F(x, y, c) = xy^2 + (x+c)^2$, d'où $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + 2(x+c)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$, on doit éliminer entre $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial c} = 2(x+c) = 0$. On trouve $xy^2 = 0$, ce qui donne, soit $y^2 = 0$, soit $x = 0$. Or, $y^2 = 0$ entraînant $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, est, non une solution, mais un lieu de points doubles des courbes intégrales.

D'autre part, $x = 0$ donne $\frac{\partial F}{\partial x} \gtrless 0$: c'est donc une solution. Mais comme on a alors $c = -x = 0$, d'où, d'après (1), $x(y^2 + x) = 0$, la solution $x = 0$ n'est qu'une partie de la solution particulière qui correspond à $c = 0$, et qui se compose d'une parabole et de la tangente en son sommet.

Il n'y a donc pas de solution singulière.

En partant de l'équation différentielle et posant $\varphi(x, y, y') = (2xy' + y)^2 + 4x$, en supposant y' fini, la solution singulière résulterait de l'élimination de y' entre

$$\varphi(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 4x(2xy' + y) = 0, \tag{3}$$

à la condition que l'on ait (criterium de Darboux)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 3y'(2xy' + y) + 2 = 0. \tag{4}$$

De (3) on tire, soit $x = 0$, soit $2xy' + y = 0$. Avec $x = 0$, l'équation (2) donne $y^2 = 0$, et l'équation (4) n'est pas satisfaite. Elle ne l'est pas non plus quand on pose $2xy' + y = 0$.

Donc il n'existe pas de solution singulière pour laquelle y' soit fini.

Pour rechercher si $y' = \infty$ fournit une solution singulière, on peut changer de variable ; en posant $x' = \frac{dx}{dy}$, on aura

$$\psi(y, x, x') = (2x + yx')^2 + 4xx'^2 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'} = 2(y^2 + 4x)x' + 4xy = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} x' = 2x'(2x'^2 + 3yx' + 6x) = 0. \tag{7}$$

Soit $x' = 0$; (5) donne $x^2 = 0$, (6) est satisfaite ainsi que (7); mais, dans ce cas, le criterium est insuffisant, car $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 4(x'^2 + yx' + 2x)$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 2(2x + yx')x'$ s'annulent en même temps.

La méthode élémentaire ne suffit donc pas ici pour décider si $x^2 = 0$ est une solution singulière. On a vu que c'était une portion de solution particulière.

Mécanique. — *Une tige matérielle* AB, *pesante et homogène, sans épaisseur, qui se meut dans un plan vertical, a une de ses extrémités* A *qui glisse sans frottement sur une horizontale $x'x$, et elle peut pivoter librement dans le plan autour de* A. *On demande son mouvement et la réaction de la droite $x'x$.*

Cas particulier : on supposera au début la tige très peu écartée de la verticale menée dans le sens de la pesanteur et abandonnée à elle-même sans vitesse. On cherchera l'angle formé par la tige avec la verticale et l'on calculera la durée d'une oscillation infiniment petite. On comparera cette durée avec ce qu'elle serait dans les mêmes conditions si A *était fixe.*

Soient $2l$ la longueur de la tige, M sa masse; prenons $x'x$ pour axe des x, un point O de cette droite pour origine, la verticale du point O dans le sens de la pesanteur pour axe des y. Nous avons trois inconnues, l'abscisse x de A, l'angle θ de AB avec l'axe des y et la réaction normale N. Le principe du mouvement du centre de gravité et celui des forces vives nous fournissent trois équations :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} + l\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = c,$$

$$(2) \qquad \frac{dx^2}{dt^2} + 2l\cos\theta\frac{dx}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{4l^2}{3}\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2gl\cos\theta + h,$$

et

$$(3) \qquad M l \frac{d^2 \cos\theta}{dt^2} = M g + N.$$

(1) et (2) déterminent le mouvement, (3) donnera N.

Éliminant x entre (1) et (2), on obtient :

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right) \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}\cos\theta + \frac{h}{l^2},$$

et le problème est ramené à une quadrature. Dans le cas particulier, en appelant α l'angle d'écart, (4) devient :

$$\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right) \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

En remplaçant $\cos\alpha$ et $\cos\theta$ par $1 - \frac{\alpha^2}{2}$, $1 - \frac{\theta^2}{2}$, et négligeant $\sin^2\theta$, on trouve pour la durée de l'oscillation: $T = \pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$. Si A était fixe, la durée serait $T' = \pi\sqrt{\frac{4l}{3g}}$; donc $T = \frac{T'}{2}$. On peut voir de plus que le mouvement est le même que celui d'un pendule elliptique formé par deux masses m et $m' = \frac{m}{3}$ reliées par un fil de longueur $\frac{4l}{3}$, m' glissant sans frottement sur Ox.

Épreuve pratique : Astronomie. — *On a mesuré l'azimut* A_1 *d'une étoile* E *par rapport à une mire* M, *l'heure sidérale étant* H_s. *Déterminer la position du plan méridien par rapport à la mire, connaissant l'ascension droite* Æ *et la déclinaison* D *de l'étoile, ainsi que la latitude* λ *du lieu d'observation.*

Calculer l'influence que peut avoir sur la détermination du méridien une erreur de l'heure sidérale H_s *inférieure à une seconde en valeur absolue.*

Chercher à quelle heure sidérale l'observation aurait dû être faite pour rendre minima l'influence de l'erreur de l'heure.

Données numériques :

H_s......	$19^h 37^m 56^s,5$
A_1.....	$166°48'52'',5$
$\mathcal{AR}$.....	$140°33'46'',65$
$\mathcal{D}$.....	$81°47'8'',8$
λ......	$45°11'23''$

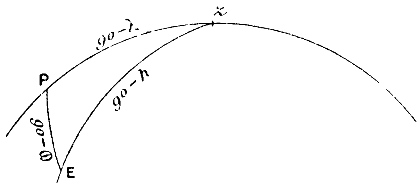
1° Le triangle de position donne

$$\cos\mathcal{D}\sin\alpha = \cos h \sin A, \tag{1}$$

$$\operatorname{tang}\mathcal{D}\cos\lambda - \sin\lambda\cos\alpha = -\sin\alpha\cot A. \tag{2}$$

L'angle horaire α est donné par

$$\mathcal{AR} + \alpha = 15\,H_s. \tag{3}$$



Posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\mathcal{D}}{\cos\alpha}, \tag{4}$$

on tire de (2)

$$\cot A = -\frac{\cot\alpha\sin(\varphi-\lambda)}{\cos\varphi}. \tag{5}$$

Les formules (3), (4), (5) donnent successivement

α............	$153°55'20'',85$
φ...........	$-\ 82°22'59'',91$
A..........	$176°\ 7'\ 9'',01$
$A - A_1$.....	$10°18'16'',51$

Le choix de la valeur convenable de A, mal définie par (5), résulte de la considération de la formule (1) qui montre que $\sin A$ et $\sin\alpha$ doivent être de même signe.

2° En différentiant (2) où α seul est supposé variable, on en tire

(6) $$dA = \sin^2 A(\sin\lambda + \cot\alpha \cot A)d\alpha.$$

Si $d\alpha = \pm 1^s = \pm 15''$, $dA = \pm 2'',55$.

3° En introduisant l'angle de position E, on a

(7) $$dA = \frac{\cos E \sin A}{\sin\alpha} d\alpha,$$

et si l'on peut avoir $\cos E = 0$, on aura $dA = 0$. Alors le triangle ZPE serait rectangle, et l'angle horaire α_1, pour l'instant considéré, serait donné par

(8) $$\cos\alpha_1 = \frac{\tan g \lambda}{\tan g ☊},$$

ce qui exige que l'on ait $\lambda <$ ☊, condition remplie par les données.

On trouve

$$\alpha_1 = 81^\circ 38' 50'', 56,$$

et l'heure sidérale correspondante sera

$$H'_s = 14^h 48^m 50^s, 47.$$

Montpellier.

Analyse. — 1° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface* S *représentée par l'équation*

$$z = a^2 x^4 - 6ab x^2 y^2 + b^2 y^4 + c.$$

Montrer que ce sont des courbes gauches du quatrième ordre, et que deux lignes asymptotiques qui se coupent sont situées sur une même surface du second ordre.

2° *a et b étant positifs, évaluer le volume limité par la surface* S *donnée, le plan* XOY, *et le cylindre elliptique*

$$a(x - \lambda)^2 + b(y - \mu)^2 = h.$$

en supposant que les traces de ces deux surfaces sur le plan XOY *ne se coupent pas.*

1° L'équation différentielle des lignes asymptotiques peut s'écrire sous la forme

$$(ax\,dx - by\,dy)^2 = ab(y\,dx + x\,dy)^2.$$

En intégrant on pourra représenter les deux systèmes de lignes asymptotiques par les équations

$$\begin{cases} ax^2 - by^2 = 2xy\sqrt{ab} + \alpha, \\ z = 4\alpha\,xy\sqrt{ab} + \alpha^2 + c, \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 - by^2 = -2xy\sqrt{ab} + \beta, \\ z = -4\beta\sqrt{ab}\,xy + \beta^2 + c; \end{cases}$$

ces deux courbes sont situées sur la surface du second ordre

$$z = (\alpha + \beta)(ax^2 + by^2) + 2(\alpha - \beta)xy\sqrt{ab} - \alpha\beta + c.$$

2° En posant

$$x - \lambda = \frac{\rho}{\sqrt{a}}\cos\theta, \qquad y - \mu = \frac{\rho}{\sqrt{b}}\sin\theta,$$

on a

$$v = \int_0^{\sqrt{h}} \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \frac{z}{\sqrt{ab}}\,d\theta.$$

En développant la valeur de z et supprimant les termes d'ordre impair en $\sin\theta$ ou $\cos\theta$, dont l'intégrale est nulle, on a

$$\begin{aligned} v = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^{\sqrt{h}} \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} [&a^2\lambda^4 + b^2\mu^4 - 6ab\lambda^2\mu^2 + c \\ &+ 6(a\lambda^2 - b\mu^2)\rho^2\cos 2\theta + \rho^4\cos 4\theta]\,d\theta \\ = \frac{\pi h}{\sqrt{ab}}(a^2\lambda^4 &+ b^2\mu^4 - 6ab\lambda^2\mu^2 + c). \end{aligned}$$

Ce volume est équivalent à un cylindre droit ayant même base et pour hauteur la parallèle à l'axe OZ passant par le centre de l'ellipse de base et limitée à la surface S.

Mécanique. — 1° *Les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point d'une surface fixe sont déterminées par les équations*

$$x = u \sin v, \qquad y = u \cos v, \qquad z = \sqrt{u^2 - 1},$$

où u, v *sont deux paramètres variables. Un point matériel, non pesant, de masse égale à l'unité se meut sans frottement sur cette surface, sous l'influence d'une force attractive proportionnelle à la distance, issue de l'origine des coordonnées, et dont l'intensité est égale à l'unité pour l'unité de distance.*

On demande : 1° de former l'équation aux dérivées partielles dont il suffit, d'après le théorème de Jacobi, de connaître une intégrale complète pour avoir les équations finies du mouvement ; 2° de trouver une intégrale complète de cette équation ; 3° de déterminer la trajectoire et la loi du mouvement en supposant que l'on a, à l'origine du mouvement,

$$x = 2, \qquad y = 0,$$

et que la vitesse initiale est parallèle à l'axe des y *et égale à l'unité.*

2° *Un point matériel pesant, sollicité par une force pour laquelle il existe une fonction des forces, est astreint à se déplacer sans frottement sur une courbe fixe située dans un plan vertical. Peut-on déterminer la fonction des forces de manière que le point soit en équilibre quelle que soit sa position sur la courbe ?*

Examiner en particulier le cas où la courbe donnée est une parabole dont l'axe est vertical.

1° La force vive est

$$2T = \Sigma x'^2 = \frac{2u^2 - 1}{u^2 - 1} u'^2 + u^2 v'^2 = \frac{u^2 - 1}{2u^2 - 1} p^2 + \frac{q^2}{u^2},$$

relation où l'on a posé

$$p = \frac{\delta T}{\delta u'} = u' \frac{2u^2 - 1}{u^2 - 1} \quad \text{et} \quad q = \frac{\delta T}{\delta v'} = u^2 v'.$$

Soit

$$K = pu' + qv' - T;$$

la fonction des forces est

$$U = -\int r\,dr = -\frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} - u^2.$$

Si l'on pose

$$H = K - U = \frac{u^2 - 1}{2u^2 - 1} \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2u^2} + \frac{2u^2 - 1}{2},$$

l'équation de Jacobi est

$$2\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{u^2 - 1}{2u^2 - 1}\left(\frac{\delta S}{\delta u}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\delta S}{\delta v}\right)^2 + 2u^2 - 1 = 0.$$

On obtient une intégrale complète en prenant pour S une fonction de la forme

$$S = -ht + \alpha v + f(u),$$

d'où

$$-2h + \frac{u^2 - 1}{2u^2 - 1} \overline{f'(u)}^2 + \frac{\alpha^2}{u^2} + 2u^2 - 1 = 0$$

et

$$S = -ht + \alpha v \pm \int \sqrt{\frac{2hu^2 - \alpha^2 - u^2(2u^2 - 1)}{u^2 - 1}(2u^2 - 1)} \frac{du}{u}.$$

Le mouvement est alors déterminé par les équations

$$\frac{\delta S}{\delta h} = -t \pm \int \sqrt{\frac{2u^2 - 1}{(u^2 - 1)[2hu^2 - \alpha^2 - u^2(2u^2 - 1)]}}\, u\,du = \beta,$$

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha} = v \mp \alpha \int \sqrt{\frac{2u^2 - 1}{(u^2 - 1)[2hu^2 - \alpha^2 - u^2(2u^2 - 1)]}} \frac{du}{u} = \gamma,$$

et la vitesse sera donnée par les formules

$$u' = \pm \frac{1}{u}\sqrt{\frac{2hu^2 - \alpha^2 - u^2(2u^2-1)}{2u^2-1}(u^2-1)},$$

$$v' = \frac{\alpha}{u^2}.$$

Pour $t = 0$, on suppose

$$x = 2, \qquad y = 0, \qquad x' = 0, \qquad y' = 1:$$

par suite

$$u = 2, \qquad v = \frac{\pi}{2}, \qquad u' = 0, \qquad v' = -\tfrac{1}{2};$$

on en déduit

$$\alpha = -2, \qquad h = 4.$$

Les équations du mouvement deviennent alors

$$v = \frac{\pi}{2} \mp \int_2^u \frac{2\,du}{u\sqrt{(u^2-1)(4-u^2)}} = \frac{\pi}{2} \mp \text{arc tang}\, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-u^2}{u^2-1}},$$

$$t = \pm \int_2^u \frac{2\,du}{\sqrt{(u^2-1)(4-u^2)}} = \mp \text{arc tang} \sqrt{\frac{4-u^2}{u^2-1}};$$

u ne pouvant varier qu'entre 1 et 2, on doit prendre partout le second signe. Ces équations peuvent encore se mettre sous la forme

$$u^2 = 1 + 3\cos^2 t, \qquad \cos^2 v = \frac{4-u^2}{3u^2} = \frac{\sin^2 t}{1+3\cos^2 t},$$

ou encore

$$x = 2\cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = \sqrt{3}\cos t;$$

la trajectoire est donc une ellipse située dans le plan $z = x\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et le rayon vecteur passant par le centre décrit des aires proportionnelles au temps.

2° Soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation de la courbe dans son plan, et $F(x, y)$ la fonction des forces, le point étant supposé assujetti à rester dans le plan de la courbe. La courbe φ doit être une courbe de niveau, c'est-à-dire qu'elle doit avoir une équation de la forme $F = c$, de sorte que l'on peut prendre

$$F = f[\varphi(x, y)],$$

f étant une fonction arbitraire.

Si

$$\varphi = x^2 - 2py,$$

OY étant l'axe vertical, on a

$$F = f(x^2 - 2py);$$

les composantes de la force seront

$$X = 2xf', \qquad Y = -2pf',$$

f' étant une fonction arbitraire de $x^2 - 2py$.

On a un cas particulier simple, si f' est supposé constant.

Astronomie. — *Calculer l'heure sidérale à laquelle un astre a un azimut donné :*

Ascension droite de l'astre..	$+\ 65^\circ 42'\ 7'',9$
Déclinaison................	$-\ 53^\circ 58' 53'',6$
Azimut donné..............	$+320^\circ\ 5' 34'',4$
Latitude du lieu...........	$-\ 67^\circ 28' 42'',8$

λ étant la colatitude, δ la distance polaire, E l'angle des grands cercles joignant l'étoile au pôle et au zénith, on a

$$\sin E = \frac{\sin\lambda}{\sin\delta}\sin(A - 180^\circ),$$

$$\cot\frac{360^\circ - Æ}{2} = \operatorname{tang}\frac{A - E - 180^\circ}{2}\,\frac{\sin\dfrac{\lambda + \delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta - \lambda}{2}}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} E &= 135^\circ 17' 57'', 9, \\ \text{Æ} &= 338^\circ \; 5' 41'', 5, \\ H = \text{Æ} + \text{Æ} &= 303^\circ 47' 49'', 4, \end{aligned}$$

ou

$$20^h 15^m 11^s, 29.$$

Marseille.

Analyse. — *M. Sophus Lie a proposé le changement de variables défini par les trois équations*

$$\begin{gathered} x' + \sqrt{-1}\, y' + z + xz' = 0, \\ x(x' - \sqrt{-1}\, y') + y - z' = 0, \\ z' + p - q\,(x' - \sqrt{-1}\, y') = 0. \end{gathered}$$

Démontrer que l'on peut déterminer ρ, p' *et* q' *de sorte que la relation*

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' - \rho(dz - p\,dx - q\,dy) = 0$$

soit une conséquence identique des deux premières équations différentiées totalement, quand la troisième équation est supposée vérifiée. Calculer alors

$$x' + \sqrt{-1}\, y',\ x' - \sqrt{-1}\, y',\ z',\ p' \text{ et } q'$$

en fonction de x, y, z, p *et* q.

Si le point xyz *décrit une ligne droite, démontrer que, quelles que soient les valeurs de* p *et* q, *le point* $x'y'z'$ *est sur une sphère déterminée.*

Si l'on imagine un plan passant par la ligne droite et dont l'orientation, en variant d'une manière continue, détermine les valeurs de p *et de* q ($dz = p\,dx + q\,dy$ *dans ce plan*), *le point* $x'y'z'$ *tracera une ligne sur la sphère. Le plan tangent à la sphère en chaque point de cette ligne sera déterminé. On aura* $dz' = p'\,dx' + q'\,dy'$. *C'est dans ce sens que l'on peut dire qu'à une droite la transformation fait correspondre une sphère.*

En remarquant : 1° que la tangente à une ligne asymptotique a trois points confondus avec la surface ; 2° qu'une sphère tangente à la surface a avec cette surface une intersection qui présente ordinairement au point de contact un point double à tangentes distinctes, mais que les tangentes sont confondues suivant la direction de l'un des axes de l'indicatrice, quand la sphère a pour centre l'un des centres principaux de courbure (on dit alors que la sphère est osculatrice), on peut démontrer qu'à la tangente asymptotique la transformation fait correspondre une sphère osculatrice, et que, comme conséquence, les lignes asymptotiques d'une surface deviennent par la transformation les lignes de courbure de la surface transformée.

Différentions les deux premières équations, ajoutons-les ensuite après les avoir respectivement multipliées par des indéterminées λ_1 et λ_2, et identifions avec l'équation différentielle proposée. Nous aurons

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(dx' + \sqrt{-1}\,dy' + dz + z'\,dx + x\,dz') \\
&\quad + \lambda_2[dx(x' - \sqrt{-1}\,y') + x\,dx' - \sqrt{-1}\,x\,dy' + dy - dz'] \\
&\equiv dz' - p'\,dx' - q'\,dy' - \rho(dz - p\,dx - q\,dy).
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des mêmes différentielles dans les deux membres, on a

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda_1 x - \lambda_2, \\
-p' &= \lambda_1 + \lambda_2 x, \\
-q' &= \sqrt{-1}\,(\lambda_1 - \lambda_2 x), \\
-\rho &= \lambda_1, \\
\rho p &= \lambda_1 z' + \lambda_2(x' - \sqrt{-1}\,y'), \\
\rho q &= \lambda_2.
\end{aligned}$$

On a, avec les équations proposées, neuf équations pour déterminer les huit quantités x', y', z', p', q', ρ, λ_1 et λ_2 en fonction des autres. Le calcul va nous montrer que ces neuf équations sont compatibles à cause de la troisième équation proposée. En effet, on a facilement

$$\rho = \frac{\lambda_1}{-1} = \frac{\lambda_2}{q} = \frac{1}{-x-q} = \frac{-p'}{-1+qx} = \frac{-q'}{\sqrt{-1}(-1-qx)}$$
$$= \frac{\rho p}{-z'+q(x'-\sqrt{-1}\,y')}.$$

L'égalité du premier et du dernier rapport donne précisément

$$p = -z' + q(x' - \sqrt{-1}\,y'),$$

ce qui est la troisième équation de M. Lie.

On a facilement ensuite les formules [1]

$$x' + \sqrt{-1}\,y' = -z - x\,\frac{px+qy}{q-x},$$
$$x' - \sqrt{-1}\,y' = \frac{y+p}{q-x},$$
$$z' = \frac{px+qy}{q-x},$$
$$p' = \frac{qx-1}{q+x},$$
$$q' = -\sqrt{-1}\,\frac{qx+1}{q+x}.$$

Ce sont les formules d'un changement de cinq variables en cinq nouvelles variables. Au point de vue géométrique, on peut considérer x, y, z, p, q comme définissant l'ensemble d'un point d'une surface et du plan tangent en ce point, et x', y', z', p', q' définiront un point de la surface *transformée* et son plan tangent. En effet, si $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ exprime la condition à laquelle satisfait un déplacement infiniment petit dans le plan tangent, il résulte du calcul précédent que la même condition $dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0$ sera satis-

---

[1] *Voir* GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, p. 266.

faite pour la surface transformée et réciproquement. On peut énoncer ce résultat en disant que la transformation transforme deux surfaces tangentes en deux surfaces tangentes (transformations de contact de M. Lie).

Si l'on suit une courbe sur une surface, x, y, z, p, q ne dépendront que d'un seul paramètre. Il en sera de même de x', y', z', p', q'. Donc, à tous les points d'une courbe et aux plans tangents en ces points à la surface, correspondent points de courbe et plans tangents dans la transformation.

On peut encore considérer une courbe isolément et se donner des variables p et q en chaque point x, y, z, par exemple par la position d'un plan tangent à la courbe en chaque point; on aura des transformations correspondantes.

Dans le cas d'une ligne droite, dont les équations sont

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

on aura en même temps les deux premières équations de M. Lie, ce qui donnera la condition

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ z' & 0 & 1 & x' + \sqrt{-1}\,y' \\ x' - \sqrt{-1}\,y' & 1 & 0 & -z' \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation d'une sphère.

La loi suivant laquelle p est lié à q en chaque point de la droite détermine une courbe sphérique et les plans tangents à la sphère en chacun des points de cette courbe. A trois points confondus sur la droite correspondront trois points confondus sur la sphère : c'est de là que se tire la dernière partie de la question proposée.

MÉCANIQUE. — *Dans un plan donné, un canal circulaire* A *est mobile sans frottement autour de son centre qui est fixe. Dans ce canal, dont l'intérieur est dépoli, se meut un point* B, *non pesant.*

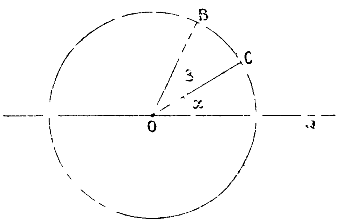
On donne au système un mouvement initial. Étudier le mouvement subséquent.

Étudier le cas particulier suivant :

La masse du canal est égale à dix fois la masse du point B. *Le rayon du canal est égal à deux mètres. Le coefficient de frottement du point à l'intérieur du canal est égal à un dixième.*

A l'instant initial, le canal est sans vitesse et le point B *a une vitesse égale à l'unité.*

Soient O le centre fixe du canal A et Ox une droite fixe dans le plan où se meut le canal. Désignons par C



un point invariablement lié au canal et situé sur sa circonférence.

Soient α l'angle xOC et β l'angle COB, ces angles étant comptés de droite à gauche. Nous appellerons M la masse du canal A et m la masse du mobile B. Nous désignerons par R le rayon du canal dont le moment d'inertie sera alors MR^2.

Puisque le canal est dépoli, l'action du canal sur le point ne sera pas normale au canal, si la vitesse relative du point sur le canal n'est pas nulle. Cette action pourra se décomposer en deux forces, l'une normale N, l'autre tangentielle Nf, en désignant par f le coefficient de frottement. Cette composante tangentielle, dont la valeur absolue est Nf, sera dirigée en sens contraire du mouvement relatif du point B.

Les composantes de la réaction du point B sur le canal seront égales et contraires aux précédentes.

Dans ce qui suit, on supposera que la valeur initiale de $\frac{d\beta}{dt}$ est positive. On verrait sans difficulté comment il faudrait modifier les équations si la valeur initiale de $\frac{d\beta}{dt}$ était négative.

La composante N de l'action du canal sur le point B est évidemment dirigée suivant BO. Nous la compterons donc dans le sens BO, et par conséquent la composante tangentielle sera égale à $-Nf$ si on la compte dans le sens où β croît.

Si l'on projette sur la tangente et sur la normale en B, les équations du mouvement du point seront

$$(1) \qquad m\mathrm{R}\frac{d^2(\alpha+\beta)}{dt^2} = -\mathrm{N}f.$$

$$(2) \qquad m\mathrm{R}\left[\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}\right]^2 = \mathrm{N}.$$

Enfin, si l'on étudie le mouvement du canal, le théorème du moment des quantités de mouvement, par rapport au point O, donnera

$$(3) \qquad \mathrm{MR}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mathrm{N}f.$$

Des équations (1) et (3), on tire l'équation

$$\mathrm{M}m\mathrm{R}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\mathrm{N}f(\mathrm{M}+m),$$

qui montre que $\frac{d\beta}{dt}$ va toujours en décroissant, tandis que l'équation (3) montre que $\frac{d\alpha}{dt}$ va toujours en croissant. Enfin l'équation (1) montre que $\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}$ va toujours en décroissant.

Des équations (1) et (2), l'on tire

$$\frac{d^2(\alpha+\beta)}{dt^2}+f\left[\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}\right]^2=0,$$

d'où l'on tire, en désignant par u_0 la valeur initiale de $\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}$,

$$\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}=\frac{u_0}{1+u_0ft}. \tag{4}$$

Ensuite, les équations (1) et (3) donnent

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2}+m\frac{d^2(\alpha+\beta)}{dt^2}=0,$$

d'où l'on tire, en désignant par v_0 la valeur initiale de $\frac{d\alpha}{dt}$,

$$M\frac{d\alpha}{dt}+m\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}=Mv_0+mu_0. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) donnent alors

$$M\frac{d\alpha}{dt}=Mv_0+mu_0-\frac{mu_0}{1+u_0ft}, \tag{6}$$

$$M\frac{d\beta}{dt}=\frac{(M+m)u_0}{1+u_0ft}-(Mv_0+mu_0). \tag{7}$$

Pour $t=0$, $\frac{d\beta}{dt}$ est égal à $-u_0-v_0$ qu'on a supposé positif, puisqu'on a supposé que la valeur initiale de $\frac{d\beta}{dt}$ était positive. Cette quantité $\frac{d\beta}{dt}$ va en décroissant, et elle s'annulera pour une valeur de t fournie par la relation

$$t=\frac{M(u_0-v_0)}{fu_0(Mv_0+mu_0)}. \tag{8}$$

Dans cette expression, le numérateur est positif; quant au dénominateur, il peut être positif ou négatif. S'il est positif, $\frac{d\beta}{dt}$ deviendra nul au bout d'un certain temps et, à partir de cet instant, les équations (6) et (7) ne conviendront plus. Alors le point B restera fixe sur le canal et tout le système tournera d'un mouvement uniforme autour du point O. Si, au contraire, le dénominateur est négatif, $\frac{d\beta}{dt}$ ne s'annule jamais et les équations (6) et (7) conviennent indéfiniment. Mais alors l'équation (4) montre que la vitesse absolue du point B tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment.

Ce dernier cas se réalisera en supposant u_0 positif, avec v_0 négatif et suffisamment grand en valeur absolue. La vitesse absolue de B tendant vers zéro, la pression N tend également vers zéro, comme le montre l'équation (2) et, par suite, le frottement Nf tend également vers zéro. On comprend ainsi que le frottement, devenant infiniment petit, n'arrive pas à détruire la vitesse du canal qui, tout en décroissant en valeur absolue, tend vers une limite différente de zéro.

L'équation (4) demande une observation. Il semble que, si u_0 était négatif, $\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}$ pourrait croître indéfiniment.

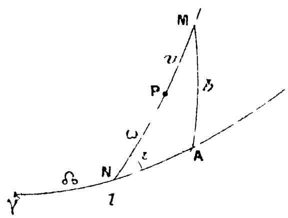
Mais, pour en rester dans l'hypothèse admise où la valeur initiale de $\frac{d\beta}{dt}$ est positive, on voit que, si u_0 est négatif, il faut que v_0 soit aussi négatif. Mais alors la valeur de t, fournie par l'équation (8), est positive, et elle est inférieure à la valeur de t, qui annulerait $1+u_0 ft$. On n'a donc pas à examiner le cas de $1+u_0 ft = 0$, car les équations cessent de convenir avant d'atteindre la valeur de t, qui vérifierait cette dernière équation.

Pour terminer la solution, il reste à trouver les valeurs de α, β, $\alpha+\beta$ en fonction du temps, ce qui ne présente aucune difficulté.

Le cas particulier indiqué ne présente aucune complication, il permet seulement de préciser la question par des données numériques.

En résumé, les vitesses absolues du point et du canal tendent à devenir égales. Si la vitesse absolue du canal n'est pas trop grande, l'égalité se produira et, à partir de cet instant, le canal et le point formeront un système invariable animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de O. Mais si la vitesse absolue du canal est trop grande par rapport à la vitesse absolue du point B et si les deux vitesses absolues sont de sens contraire, le mouvement se continuera sans que les vitesses deviennent jamais égales, la vitesse du point B tendra vers zéro et la vitesse angulaire du canal tendra vers une limite différente de zéro.

ASTRONOMIE. — *Connaissant l'anomalie vraie v d'une planète, ainsi que la longitude du nœud ascen-*



dant, l'inclinaison i et l'argument ω de la latitude du périhélie de l'orbite, calculer la longitude l et la latitude b héliocentrique de cette planète.

$$\begin{aligned} v &= 158^\circ 29' 17'',8, \\ ☊ &= 80^\circ 46' 39'',0, \\ i &= 10^\circ 37' 10'',0, \\ \omega &= 68^\circ 51' 10'',0. \end{aligned}$$

On peut se servir des formules

$$\operatorname{tang}(l - \Omega) = \operatorname{tang} u \cos - i,$$
$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} i \sin(l - \Omega),$$

où

$$u = v + \omega.$$

Les tangentes suffisent pour déterminer les angles $(l - \Omega)$ et b, car $\sin(l - \Omega)$ et $\sin u$ ont le même signe et b est compris entre -90° et $+90^\circ$.

On a

$$u = 227^\circ 20' 27'',8,$$

$\operatorname{tang} u$	$0,0355.293$
$\cos i$	$\bar{1},9924.973$
$\operatorname{tang}(l - \Omega)$	$0,0280.266$

$$l - \Omega = 226^\circ 50' 50'',9,$$
$$l = 307^\circ 37' 29'',9,$$

$\sin(l - \Omega)$	$-\bar{1},8630.465$
$\operatorname{tang} i$	$\bar{1},2729.924$
$\operatorname{tang} b$	$-\bar{1},1360.389$

$$b = -7^\circ 47' 19'',95.$$

Les signes placés devant les logarithmes se rapportent à la quantité elle-même.

Toulouse.

Analyse. — I. *On donne deux nombres réels positifs m, n dont la somme $m + n$ est égale à l'unité, et l'on demande de calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{a-x}\, dx,$$

dans laquelle a désigne un nombre réel donné et choisi de façon que cette intégrale ait un sens.

Appliquer au cas où l'on a

$$m = n = \frac{1}{2}.$$

II. x, y, z *désignant des coordonnées cartésiennes rectangulaires, déterminer une surface satisfaisant à l'équation*

$$(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$$

et passant par le cercle défini par les équations

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 = 1.$$

Déterminer aussi une surface satisfaisant à la même équation et passant par la droite définie par les équations

$$x = y = z.$$

III. *Définition et détermination des lignes de courbure d'une surface donnée.*

MÉCANIQUE. — I. *Étudier le mouvement d'un point matériel assujetti à décrire la courbe parfaitement polie représentée par l'équation*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \qquad a \text{ const.}$$

et soumis à l'action d'une force perpendiculaire à Ox, *dirigée vers cet axe et variant en raison inverse de la racine cubique de l'ordonnée. On supposera que le mobile part sans vitesse initiale du point de coordonnées* $x = 0$, $y = a$ *et qu'il commence à se mouvoir sur l'arc compris dans l'angle* yOx *formé par les parties positives des axes de coordonnées.*

Montrer que cet arc de courbe est brachistochrone pour cette loi de force.

II. *Un corps solide partant du repos est assujetti à tourner autour d'un de ses points* O *supposé fixe et mis en mouvement par un couple de percussion. On demande de déterminer la valeur de la force vive* $2T$ *que prend le corps.*

Supposons maintenant que le même corps partant du repos soit mis en mouvement par le même couple de percussion, mais que l'on fixe un autre de ses points A *de façon qu'il soit contraint de tourner autour d'un axe fixe* OA. *Calculer la force vive* $2T'$ *qu'il aurait dans ce cas et montrer que cette force vive est inférieure à celle qu'il aurait acquise dans le premier cas, c'est-à-dire que l'on a*

$$T' < T.$$

On donne en grandeur et en direction les axes principaux d'inertie du corps relativement au point O *et le moment du couple de percussion.*

Épreuve pratique. — *En un point dont la latitude est* $43°36'45'',3$, *on a observé une étoile. On a trouvé l'angle horaire égal à* $3^h 45^m 8^s,15$ *et la déclinaison à* $+8° 12' 46'',9$. *On demande de corriger ces coordonnées de la réfraction atmosphérique. On admettra qu'à la distance zénithale* z *à laquelle se trouve la position observée, la correction à apporter à la distance zénithale observée pour avoir la distance zénithale vraie est* $\alpha \tang z$, *où*

$$\alpha = 58'',3.$$