NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL APPELL

Exercice sur les courbes de direction

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 491-495

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__491_1>

[M[1]8b]

EXERCICE SUR LES COURBES DE DIRECTION;

PAR M. PAUL APPELL.

Laguerre a appelé *courbes de direction* (1) les courbes algébriques

$$f(x, y) = 0$$

telles que les cosinus directeurs de la tangente en un point (x, y) puissent être exprimés *rationnellement* en fonctions de x et y. En d'autres termes, ce sont des courbes pour lesquelles la quantité

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

peut s'exprimer rationnellement en fonction de x et y.

(1) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, 1880.

Pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que la différentielle ds de l'arc de la courbe soit égale à une fonction rationnelle de x et de y multipliée par dx. En effet, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\, dx,$$

en vertu de la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{dy}\, dy = 0.$$

Nous nous proposons d'indiquer un moyen de déduire d'une courbe de direction une infinité d'autres courbes de direction.

Soit

$$(1) \qquad F(X, Y) = 0$$

une de ces courbes. En appelant S l'arc de cette courbe on a

$$(2) \qquad dS = \sqrt{dX^2 + dY^2} = R(X, Y)\, dX,$$

$R(X, Y)$ désignant une fonction rationnelle de X et Y.

Soient $z = x + yi$ une variable imaginaire, $f(z)$ une fonction rationnelle de z choisie de telle façon que tous les résidus de $f^2(z)$ soient *nuls*. Posons

$$(3) \qquad Z = X + Yi = \int f^2(z)\, dz.$$

L'intégrale du second membre est alors rationnelle en z et l'on a, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(4) \qquad X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x. y),$$

$\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ désignant des fonctions rationnelles de x et y.

Si l'on fait la substitution (4), la courbe (1) se transforme en une autre courbe

$$G(x, y) = 0, \tag{5}$$

qui est aussi *une courbe de direction.*

En effet, l'équation (3) donne

$$dX + i\,dY = f^2(z)(dx + i\,dy).$$

Changeons i en $-i$, appelons z_0 la conjuguée de z et f_0 la fonction déduite de f par le changement de signe de i. Il vient

$$dX - i\,dY = f_0^2(z_0)(dx - i\,dy).$$

Multipliant membre à membre, on a

$$dX^2 + dY^2 = f^2(z) f_0^2(z_0)(dx^2 + dy^2),$$

et, en extrayant les racines,

$$dS = f(z) f_0(z_0)\,ds.$$

Comme, par hypothèse, $\frac{dS}{dX}$ est une fonction rationnelle de X et Y, on a

$$ds = \frac{R(X, Y)}{f(z) f_0(z_0)}\,dX,$$

et, d'après les formules de transformation (4), $\frac{ds}{dx}$ est une fonction rationnelle de x et y : en effet, ces formules montrent que $\frac{dX}{dx}$ est rationnel en x et y. La nouvelle courbe est donc bien une courbe de direction.

Exemples. — En partant de la ligne droite et du cercle, on obtient ainsi une infinité de courbes de direction.

Ainsi prenons

$$X + Y i = 3\int z^2\,dz = z^3,$$

nous aurons

$$X = x^3 - 3xy^2.$$

La droite $X = a^3$ devient la courbe de direction

$$x^3 - 3xy^2 = a^3,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^3 \cos 3\theta = a^3.$$

De même, en faisant

$$f^2(z) = 5z^4, \qquad f^2(z) = (2k+1)z^{2k}$$

(k entier positif ou négatif), on déduit de $X = a^k$ la courbe de direction

$$r^{2k+1} \cos(2k+1)\theta = a^{2k+1}.$$

Si l'on prend $f(z) = \frac{1}{z}$, la transformation se ramène à une inversion.

Remarque. — En prenant pour $f(z)$ une fonction transcendante uniforme, telle que les résidus de $f^2(z)$ soient tous nuls, on obtient une transformation faisant correspondre à une courbe algébrique de direction une courbe transcendante telle que l'arc s de cette courbe vérifie une équation de la forme

$$ds = \Phi(x, y)dx,$$

Φ étant uniforme. Ainsi, en prenant

$$f(z) = e^{\frac{x+yi}{2a}}$$

(a réel), on a

$$X = ae^{\frac{x}{a}} \cos\frac{y}{a},$$

et la droite $X = a$ devient la courbe

$$e^{\frac{x}{a}} \cos\frac{y}{a} = 1;$$

c'est la chaînette d'égale résistance de Coriolis, pour laquelle

$$ds = \frac{dy}{\cos \frac{y}{a}}.$$