Licence ès sciences mathématiques. Session de juillet 1896. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 469-485

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__469_1>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1896. — COMPOSITIONS.

Besançon.

ANALYSE. — I. *Étant donnés deux points fixes* O *et* A, *déterminer une courbe, sachant que la tangente en l'un quelconque de ses points* M *passe par le point* A' *symétrique de* A *par rapport à* OM. *Discuter la forme des courbes obtenues.*

En prenant OA pour axe polaire et O pour pôle, on obtient une équation de Bernoulli ; les courbes demandées sont représentées par l'équation

$$r = \frac{a \sin\theta}{\theta - \theta_0},$$

le rayon vecteur admet une infinité de maxima : la courbe admet une asymptote à distance finie.

II. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{3x^5 - 2x^3 + 4x^4 - 3ax^2}{(x+a)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

où a est une constante plus grande que 1.

On divise le numérateur de la fraction par $(x+a)^2$, ce qui permet de décomposer l'intégrale en deux parties. La première partie est constituée par des termes de la forme

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dont la valeur s'obtient immédiatement. Pour obtenir l'intégrale restante, on intègre le long d'un contour formé : 1° d'une circonférence de rayon très grand ayant pour centre l'origine; 2° d'une circonférence de rayon très petit ayant pour centre le point $(-a)$; 3° d'une coupure allant du point (-1) au point $(+1)$. La valeur demandée est zéro.

MÉCANIQUE. — I. *Transformation de Lagrange pour le mouvement d'un point.*

II. *Une barre homogène pesante glisse par une extrémité* A *sur un cercle tracé dans un plan vertical et passe constamment par un point fixe* O *de la circonférence situé sur un diamètre horizontal. Déterminer le mouvement de la barre et les réactions des points* A *et* O.

L'équation des forces vives suffit pour déterminer le mouvement. Les réactions s'obtiennent ensuite en écrivant les équations du mouvement du centre de gravité de la barre.

Épreuve pratique. — *On demande de calculer pour le* 27 *mai* 1885, *à* $9^{\mathrm{h}}\,25^{\mathrm{m}}$, *temps moyen de Paris, la distance angulaire du centre de la Lune au centre de Jupiter :*

1° *En partant des coordonnées équatoriales des deux axes ;*

2° *En interpolant les distances lunaires de la* Connaissance des Temps.

Dijon.

Analyse. — I. *Faire voir qu'on reproduit une équation aux dérivées partielles donnée, linéaire par rapport aux dérivées de la fonction inconnue, par l'élimination des éléments d'indétermination contenus dans son équation intégrale générale, entre les équations engendrées par la différentiation de cette dernière.* (Question de cours.)

II. *De quelles formes doivent être les fonctions indéterminées* $P(x, y)$, $Q(x, y)$, *pour que les équations aux différentielles totales*

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x} - Pu,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{y^2 - x^2}{y} - Qu$$

forment un système passif (*c'est-à-dire aient une intégrale générale renfermant une constante arbitraire*)?

III. *Intégrer ces équations en supposant* $P = \frac{1}{x}$, $Q = \frac{1}{y}$.

II. En différentiant la première équation par rapport à y et substituant à $\frac{du}{dy}$ le second membre de la dernière équation, en différentiant ensuite celle-ci par rapport à x et substituant à $\frac{du}{dx}$ le second membre de la première, on obtient pour $\frac{d^2 u}{dx\,dy}$ deux expressions dont l'identité, exprimée quelles que soient x, y, u considérées un instant comme trois variables indépendantes, conduit aux deux conditions

$$\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = 0,$$
$$xP + yQ - 2 = 0;$$

et l'intégration de ce système mixte donne les expressions cherchées

$$P = \frac{1}{x}\left[1 + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right], \qquad Q = \frac{1}{y}\left[1 - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

où φ représente une fonction arbitraire d'une seule variable.

III. Le système particulier à intégrer est

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{x^2 - y^2}{x} + \frac{u}{x}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{y^2 - x^2}{x} + \frac{u}{y}. \end{aligned} \right.$$

En prenant la première équation isolément, y considérant y comme une variable paramétrique et l'intégrant, il vient, par la méthode propre aux équations linéaires, une certaine fonction de x, de y et, en outre, d'une fonction arbitraire de y, dont la détermination procurée par l'autre équation donne, pour l'intégrale cherchée,

$$u = x^2 + y^2 + Cxy,$$

où C est une constante arbitraire.

On pourrait aussi intégrer les équations (α), rendues homogènes par la suppression des termes indépendants de u dans les seconds membres, ce qui conduit à

$$u = Cxy,$$

puis remplacer C par la fonction de x et de y que donne la méthode de la variation des constantes arbitraires étendue au cas dont il s'agit.

On pourrait encore intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u,$$

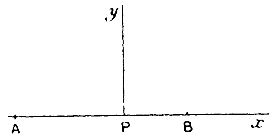
résultant d'une combinaison évidente des équations (α), puis déterminant la fonction arbitraire intervenant dans l'intégrale générale, de manière que celle-ci satisfasse à l'une des équations proposées, choisie au hasard.

Mécanique. — I. *Forme d'équilibre d'un fil homogène pesant entre deux points. Formules relatives à cette forme d'équilibre.*

II. *Un fil homogène pesant est attaché par ses deux extrémités à deux points fixes* A *et* B *situés à la même hauteur, et passe sur une poulie infiniment petite* P *située entre* A *et* B *et à la même hauteur. On demande les positions d'équilibre du fil. On néglige les frottements de la poulie sur son axe et du fil sur la poulie.*

On posera $PA = a$, $PB = b$, *et l'on désignera par* l *la longueur du fil.*

II. Le fil a la forme de deux arcs de chaînette l'un allant de A en P, l'autre de P en B.



Les tensions en P étant égales pour chaque arc de chaînette, les axes étant Px horizontal dirigé vers B et Py vertical dirigé vers le haut, les équations des chaînettes seront

$$y - y_0 = \frac{h}{2}\left[e^{\left(x + \frac{a}{2}\right)\frac{1}{h}} + e^{-\left(x + \frac{a}{2}\right)\frac{1}{h}}\right],$$

$$y - y_0 = \frac{k}{2}\left[e^{\left(x - \frac{b}{2}\right)\frac{1}{k}} + e^{-\left(x - \frac{b}{2}\right)\frac{1}{k}}\right].$$

On en tire, pour déterminer h et k, les deux équations

$$h\left(e^{\frac{a}{2h}} + e^{-\frac{a}{2h}}\right) = k\left(e^{\frac{b}{2k}} + e^{-\frac{b}{2k}}\right),$$

$$h\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right) = k\left(e^{\frac{b}{2k}} - e^{-\frac{b}{2k}}\right) = l,$$

d'où on tire, pour déterminer h, l'équation

$$\frac{2b}{\sqrt{4h^2 - l^2 + 2lh\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right)}} = \mathrm{L}\left(l + 2he^{-\frac{a}{2h}}\right) - \mathrm{L}\left(2he^{\frac{a}{2h}} - l\right).$$

Astronomie. — *Connaissant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, ainsi que l'obliquité de l'écliptique, calculer la longitude et la latitude.*

$$\text{Æ} = 12^{h}37^{m}5^{s},99,$$
$$\delta = -(2^{\circ}33'49'',6),$$
$$\omega = 23^{\circ}27'8'',98;$$

on trouve

$$L = 189^\circ 31' 53'', 1,$$
$$\lambda = 1^\circ 19' 16'', 6.$$

Rennes.

ANALYSE. — *Étant donnés un plan* P *et un point fixe* O *de ce plan, on propose :*

1° *De former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que la portion* MN *de leur normale comprise entre le pied* M *de cette normale et le plan* P *soit constamment égale à* ON ;

2° *D'intégrer cette équation;*

3° *De déterminer la fonction arbitraire de manière que les surfaces soient de révolution autour de la perpendiculaire* OZ *au plan* P;

4° *De trouver sur la surface*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

(*le plan* P *est le plan des* xy) *à laquelle on est ainsi conduit, les lignes dont la normale principale rencontre constamment* OZ.

La quatrième question se ramène aisément à une quadrature. A l'égard des trois premières questions on pourra observer qu'une solution singulière, au point de vue géométrique, est constituée par les cylindres à génératrices parallèles à OZ.

Le calcul, conduit sans précaution, donne non pas ces cylindres, mais leurs transformés dans une inversion de pôle O. Ce sont les solutions propres de la question proposée.

MÉCANIQUE. — *Un plateau circulaire homogène et horizontal tourne sur son axe de figure qui est fixe.*

Il est creusé d'une rainure circulaire concentrique à l'axe, dans laquelle on dépose sans vitesse une petite bille pesante.

La section droite de la rainure est un rectangle ouvert par le haut et à côtés verticaux, sa largeur surpasse un peu le diamètre de la bille, sa profondeur est au moins égale au rayon de la bille, de manière que celle-ci peut porter à la fois sur le fond et sur l'une des parois de la rainure.

L'appareil, ayant la vitesse angulaire ω_0 *au moment où l'on y dépose la bille, est abandonné à lui-même.*

Étudier le mouvement du système sous l'action des frottements qui vont naître entre la bille et le plateau.

On s'assurera d'abord que la bille porte sur la paroi de la rainure qui est la plus éloignée de l'axe; et il y aura deux frottements en jeu. Alors, en désignant par λ le rapport du moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation de la bille dans la situation ci-dessus définie, au moment d'inertie du plateau, le théorème des aires permet d'exprimer la vitesse de rotation ω du plateau et la vitesse angulaire ω' de la bille en fonction de la vitesse angulaire $\Omega = \omega' - \omega$ par ces formules

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \frac{\omega_0 + \Omega}{\lambda}, \\ \omega &= \frac{\omega_0 - \lambda\Omega}{1 + k}; \end{aligned} \right.$$

soit a la distance du centre de la bille à l'axe.

L'évaluation du travail *des frottements* donne (théorème des forces vives) l'équation du mouvement entre les époques t et $t + dt$

$$(2) \qquad \Omega\left[\frac{d\Omega}{1+\lambda} - f\left(\left(\frac{g}{a} + \frac{(\omega_0+\Omega)^2}{(1+\lambda)^2}\right)\right) dt\right] = 0$$

(f coefficient de frottement); dans la première phase du mouvement Ω est < 0.

Dans cette première phase on égalera donc à zéro la parenthèse facteur du premier membre de l'équation précédente.

On trouvera ainsi

$$(3) \qquad \begin{cases} \omega' = \sqrt{\dfrac{g}{a}} \operatorname{tang}\left(f\sqrt{\dfrac{g}{a}}\, t\right), \\ \omega = \omega_0 - \lambda\sqrt{\dfrac{g}{a}} \operatorname{tang}\left(f\sqrt{\dfrac{g}{a}}\, t\right), \end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément les rotations finies θ du plateau et θ' du rayon qui suit la bille.

La première phase du mouvement se prolonge jusqu'à l'instant où la bille va se figer au plateau; les deux corps auront alors la vitesse angulaire $\omega_1 = \frac{\omega_0}{1+\lambda}$, indépendante de f, et la durée τ de cette première phase sera

$$\tau = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{arc\,tang}\left(\omega_1\sqrt{\frac{a}{g}}\right).$$

Durant cette période on aura

$$f\theta' = -\log\cos\left(f\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right);$$

$$f\theta = \omega_0 f t + \lambda \log\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\, f t.$$

Dans la seconde phase du mouvement la bille fait corps avec le plateau, et l'équation (2) doit être interprétée

$$\Omega = 0;$$

on ne sait alors plus rien sur le frottement mutuel des deux corps sinon qu'il est inférieur au frottement *statique* exigé par la rupture de l'équilibre relatif. Dans la première phase du mouvement, la bille de masse m éprouve, de la paroi verticale externe, la pression centripète $-ma\omega'^2$, de la paroi horizontale, la poussée mg et tangentiellement à la rainure, et dans le sens du mouvement l'impulsion $mf(g + a\omega'^2)$.

La résultante de ces trois forces fait, avec le rayon centrifuge de la bille, avec la verticale ascendante et avec la vitesse de la bille, des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels à

$$1 - e^{2f\theta'}, \quad 1, \quad fe^{2f\theta'}.$$

Épreuve de calcul. — I. *Dans un triangle géodésique on a mesuré les trois angles* A, B, C, *et le côté* a *opposé à l'angle* A

$$A = 40^\circ 36' 56'', 81, \qquad a = 6075^{\text{toises}}, 9001,$$
$$B = 75^\circ 39' 29'', 81,$$
$$C = 63^\circ 43' 33'', 79.$$

On demande de faire sur A, B, C *les corrections probables et d'achever la résolution du triangle par la méthode de Legendre. Le rayon* ρ *de la sphère qui porte le triangle est*

$$\rho = 3266330 \text{ toises}.$$

II. *La colatitude* λ *de Rennes est*

$$\lambda = 41^\circ 53' 05'',$$

calculer la colatitude géocentrique λ_0 *de la même ville, connaissant l'excentricité* e *du méridien terrestre.*

$$e^2 = 0,0068395.$$

Caen.

Analyse et Géométrie. — I. *Intégrer le système des équations aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 \log u}{\partial x\, \partial y} = au, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

où a désigne une constante donnée différente de zéro, et u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y.

II. *En désignant par r et θ deux variables indépendantes, trouver pour la fonction $f(r, \theta)$ toutes les déterminations telles que la surface représentée en coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = f(r, \theta)$$

admette une première série de lignes asymptotiques se projetant sur le plan XOY *suivant des droites passant par l'origine, et une deuxième série de lignes asymptotiques se projetant sur le même plan suivant les spirales logarithmiques*

$$r = C e^{m\theta},$$

où m désigne un paramètre fixe différent de zéro, et C une constante arbitraire.

I. Posant $u = e^v$, on a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = ae^v, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

la seconde donne $v = \varphi(x+y)$: la première équation se réduit à une équation différentielle ordinaire qui s'intègre aisément et conduit, pour la valeur de u, à l'intégrale

$$\sqrt{\frac{A}{u}} = Be^{\frac{x+y}{2}\sqrt{A}} - \frac{a}{2B}e^{-\frac{x+y}{2}\sqrt{A}}.$$

II. Les projections des asymptotiques sur le plan des xy sont définies par l'équation

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & -2\sin\theta\, dr\, d\theta - r\cos\theta\, d\theta^2 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 2\cos\theta\, dr\, d\theta - r\sin\theta\, d\theta^2 \\ \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial\theta} dr\, d\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} d\theta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation doit être équivalente à

$$d\theta(dr - mr\, d\theta) = 0;$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0$, F est de la forme $r\varphi(\theta) + \psi(\theta)$. Pour l'identification on trouve qu'on doit avoir

$$\varphi''(\theta) + \varphi(\theta) = 0, \qquad \frac{\psi''(\theta)}{\psi'(\theta)} = m,$$

$$z = F(r, \theta) = (Ae^{\theta} + Be^{-\theta})r + Ce^{2m\theta} + D.$$

Mécanique. — I. *Déterminer le mouvement d'un point* M, *de masse égale à l'unité, assujetti à glisser sans frottement sur une surface fixe, définie par les équations*

$$x = u\sin^2 v, \qquad y = u\sin v\cos v, \qquad z = u\cos v,$$

où x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires, u et v des paramètres indépendants. La seule force qui sollicite le point M *est dirigée suivant la perpendiculaire* MP *à l'axe des z, et égale à $\frac{a^2b^2}{\overline{MP}^3}$, a et b étant des constantes. A l'instant initial on a*

$$u = a, \qquad v = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{a}.$$

II. *Une sphère homogène, soustraite à l'action de toute force extérieure, peut tourner librement autour d'un point* O *de sa surface, lequel est fixe dans l'espace. A l'instant initial, la sphère tourne avec une vitesse* ω *autour d'un axe instantané donné* OH, *faisant avec le rayon* OS *un angle dont la tangente est égale à* $\frac{2}{7}$. *Déterminer le mouvement que va prendre la sphère : faire connaître, pour un instant donné, l'accélération d'un point quelconque du solide et la pression exercée sur le point* O.

I. $\quad 2T = u'^2 + a^2(1+\sin^2 v)v'^2; \qquad U = \dfrac{a^2 b^2}{u^2 \sin^2 v}.$

L'équation de Lagrange relative à u donne

$$\frac{du'}{dt} - u(1+\sin^2 v)\,v'^2 + \frac{2a^2b^2}{u^3\sin^2 v} = 0;$$

celle des forces vives

$$u'^2 + u^2(1+\sin^2 v)\,v'^2 - \frac{2a^2b^2}{u^2\sin^2 v} = 0;$$

ajoutant à la première, multipliée par u :

$$u\frac{du'}{dt} + u'\frac{du}{dt} = 0, \qquad uu' = \text{const.} = 0, \qquad u = a.$$

La trajectoire est la courbe de Viviani. L'équation des forces vives donne

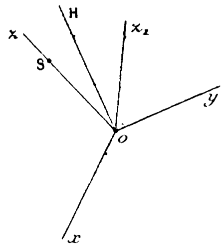
$$\frac{b}{a}\sqrt{2}\,dt = -\sin v\sqrt{1+\sin^2 v}\,dv,$$

$$\frac{bt\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{2}\cos v\sqrt{2-\cos^2 v} + \arcsin\frac{\cos v}{\sqrt{2}}.$$

II. A l'instant initial, l'axe du couple des quantités de mouvement est dans le plan SOH ; si Oy est perpendiculaire à OS dans ce plan,

$$G_y = Bq = \frac{7}{5}\,MR^2\frac{2\omega}{\sqrt{53}}, \qquad G_z = \frac{2}{5}\,MR^2\frac{7\omega}{\sqrt{53}};$$

L'axe Oz_1 du couple est fixe dans l'espace : $SOz_1 = \frac{\pi}{4}$;



la sphère prend un mouvement de Poinsot où les cônes roulants sont de révolution. On trouve

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \psi' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{53}}\,\omega, \qquad \varphi' = \frac{5}{\sqrt{53}}\,\omega.$$

En supposant qu'à un instant donné l'axe Oy soit dans le plan zOz_1, les formules de Rivals donnent

$$J_x = -\omega^2 x, \qquad J_y = \frac{4z - 49y}{53}\,\omega^2, \qquad J_z = \frac{24y - 4z}{53}\,\omega^2.$$

La pression sur le point O est parallèle à la perpendiculaire abaissée de S sur Oz_1 et égale à $\frac{4\sqrt{2}}{53}\,MR\omega^2$.

Épreuve pratique. — *Calculer, en temps sidéral et en temps moyen, la durée de visibilité de Régulus au-dessus de l'horizon de Caen, ainsi que l'angle sous lequel l'étoile rencontre l'horizon.*

Déclinaison boréale de Régulus......	12°29′26″,2
Latitude de Caen....................	49°11′14″

Poitiers.

ANALYSE. — I. *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}},$$

prise dans le sens direct le long d'un cercle de rayon égal à l'unité, ayant pour centre le point $z = i$.

II. *Étant donnée l'équation*

$$\frac{y''}{f(x)} + \frac{X}{f(x)} y' + y = 0, \tag{1}$$

dans laquelle y' et y'' sont les dérivées de y par rapport à x, et $f(x)$ une fonction connue de x :

1° *Trouver une fonction $t = \varphi(x)$ telle que si l'on prend t pour variable indépendante l'équation devienne $\frac{1}{k}\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$, k étant une constante. Donner l'intégrale générale de l'équation (1) et déterminer la fonction inconnue* X *de manière que la transformation soit possible.*

2° *Déterminer* X *de telle sorte qu'en multipliant par $2y'$ le premier membre de l'équation (1), on obtienne une dérivée exacte. Déduire de là l'intégrale générale.*

MÉCANIQUE. — *Un corps homogène de révolution, pesant, est mobile autour de son axe de figure fixé en un de ses points. Tous les points du corps sont, en outre, attirés par un point de la verticale du point fixe proportionnellement à leur masse et à leur distance à ce point. On imprime au corps une très grande vitesse de rotation autour de son axe incliné d'un angle θ_0 sur la verticale, et on l'abandonne sans autre* *vitesse initiale. Calculer la précession et la nutation de l'axe à l'instant t. On suppose le centre d'attraction à une distance du point fixe égale à la distance a du centre de gravité du corps au même point.*

COMPOSITION D'ASTRONOMIE. — *Le* 7 *juillet* 1896, *les coordonnées héliocentriques de Neptune sont*

Longitude............	77°56′31″,5
Latitude.............	— 1°24′54″,6
Log rayon vecteur ...	1,4750517

Déterminer les coordonnées géocentriques, longitude, latitude, log distance, sachant que l'on a pour le Soleil :

Longitude...........	104°47′24″,39
Latitude.............	+ 0″,48
Log distance.........	0,0071999

I. *Question de cours.* — Aucune difficulté. On trouve

$$\frac{2n!}{n!\,n!}\,\frac{\pi}{2^{2n}}.$$

II. La fonction X est la même dans les deux cas. Si l'équation (1) peut prendre la forme

$$\frac{1}{k}\,\frac{d^2y}{dt^2}+y=0,$$

le premier membre devient une différentielle quand on multiplie par $2\,dy$; il est donc évident qu'en multipliant par $2y'$ le premier membre de l'équation (1), on obtient une dérivée exacte.

MÉCANIQUE. — La force attractive appliquée au centre de gravité se décompose en deux, l'une passant par le point fixe de l'axe de figure, l'autre verticale;

toutes deux sont constantes. On est donc ramené au mouvement d'un corps pesant.

Astronomie. — Soit $\lambda = +0'',48$. Dans les formules ordinaires on peut prendre $\cos\lambda = 1$ et $\sin\lambda = \text{arc}\,\lambda$, c'est-à-dire $\sin\lambda = \frac{0,48}{206265}$.