Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 434-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__434_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1666.

Par un point fixe du plan d'un cercle donné (C), *on mène une corde quelconque dont les extrémités sont* A *et* B. *Le cercle* (Σ) *de diamètre* PA *rencontre le cercle* C *en un second point* A'; *le cercle* (Σ'), *de diamètre* PB, *rencontre le cercle* (C) *en un second point* B'. *Montrer que le point de concours des droites* AA' *et* BB', *ainsi que le point de concours des tangentes communes aux cercles* (Σ) *et* (Σ') *sont tous deux sur une même droite fixe.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION ANALYTIQUE.

Par M. A. Droz-Farny.

Choisissons un système orthogonal d'axes avec O comme origine et OP comme axe des x et posons OP $= d$.

Équation du cercle (C)

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{I}$$

Équation de PAB

$$y = m(x - d). \tag{II}$$

Le cercle (Σ) aura pour équation, en représentant par x', y' les coordonnées de A,

$$(x - d)(x - x') + y(y - y') = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 - x(d + x') - yy' + dx' = 0.$$

De même l'équation de Σ' est :

$$x^2 + y^2 - x(d + x'') - yy'' + dx'' = 0.$$

Il en résulte que les équations de AA' et de BB' sont respectivement

$$x(d + x') + yy' - dx' - r^2 = 0$$
$$x(d + x'') + yy'' - dx'' - r^2 = 0.$$

On obtiendra le lieu du point d'intersection de ces droites en éliminant entre ces équations les variables x', y', x'' et y''. On peut procéder de la manière suivante : les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite PA, donc $y' = m(x' - d)$. En portant cette valeur dans l'équation de AA', elle devient

$$x'(x + my - d) + dx - myd - r^2 = 0;$$

on a de même

$$x''(x + my - d) + dx - myd - r^2 = 0;$$

Les deux variables x' et x'' vérifiant simultanément une relation de la forme $Ax + B = 0$, il faut que $A = 0$ et $B = 0$, d'où

$$x + my - d = 0 \qquad \text{et} \qquad dx - my\,d - r^2 = 0.$$

En éliminant entre ces deux équations la seule variable m, on a, pour le lieu,

$$x = \frac{d^2 + r^2}{2d},$$

ligne droite perpendiculaire sur OP.

Cherchons maintenant le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux cercles (Σ) et (Σ').

Représentons, pour cela, par C' et C'' les centres de (Σ) et (Σ') et par R le point de coupe des tangentes extérieures aux deux circonférences.

Évidemment le point P doit être intérieur à (C); comme ce point est le centre de similitude interne de (Σ) et (Σ'), on aura

$$(C'C''PR) = -1.$$

Or les abscisses respectives de C', C'', P et R sont

$$\frac{x' + d}{2}, \quad \frac{x'' + d}{2}, \quad d, \quad x;$$

on a, par conséquent,

$$\left(\frac{x'+d}{2}+\frac{x''+d}{2}\right)(x+d)=2\left[\frac{(x'+d)(x''+d)}{4}+xd\right],$$

d'où

$$(1)\qquad x(x'+x''-2d)=x'x''-d^2.$$

En combinant les équations $x^2+y^2=r^2$ et $y=m(x-d)$, on obtient

$$x^2(1+m^2)-2m^2dx+m^2d^2-r^2=0,$$

d'où

$$x'+x''=\frac{2m^2d^2}{1+m^2},\qquad x'x''=\frac{m^2d^2-r^2}{1+m^2}.$$

Portons ces valeurs dans (1), cette relation devient, comme précédemment,

$$x=\frac{d^2+r^2}{2d}.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. A. Droz-Farny.

Comme angle $PA'A$ = angle $PB'B=90^\circ$ les droites AA' et BB' enveloppent une conique ayant P et son symétrique par rapport au centre de (C) comme foyers. Ces deux droites se coupent en S. On a

$$SA.SA'=SB.SB'=SP^2.$$

Le lieu de S est donc l'axe radical du cercle (C) et du cercle point P, et, par conséquent, une perpendiculaire sur OP à une distance OM du centre telle que

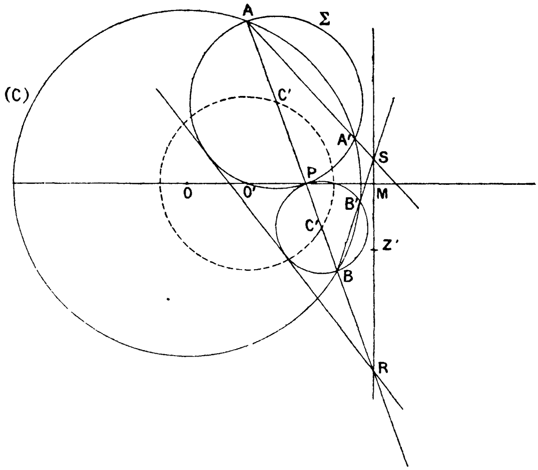
$$OM^2-r^2=(OM-d)^2,$$

d'où

$$OM=\frac{r^2+d^2}{2d}.$$

Représentons comme précédemment par C' et C'' les centres de (Σ) et (Σ'), ces deux points sont sur une circonférence fixe de rayon $\frac{r}{2}$ ayant son centre en O' point milieu de PO. Comme

C', C'', P et R sont quatre points harmoniques, le lieu de R est la polaire de P par rapport à cette circonférence, donc une



droite perpendiculaire sur O'P à une distance O'M telle que

$$O'M.O'P = \frac{r^2}{4},$$

donc

$$O'M = \frac{r^2}{2d}$$

et

$$OM = \frac{r^2}{2d} + \frac{d}{2} = \frac{r^2 + d^2}{2d}.$$

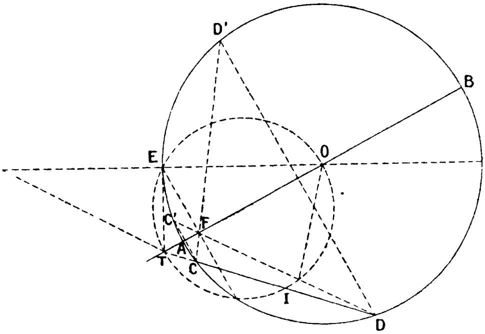
Question 1669.

Par le foyer F *d'une parabole, on mène une corde* AB *et l'on décrit sur* AB *comme diamètre une circonférence* (Σ) *qui rencontre la parabole en deux autres points* C *et* D. *On porte sur* FC, *du côté opposé à* C, *une longueur* FD' = FD, *et sur* FD, *du côté opposé à* D, *une longueur* FC' = FC. *Montrer que les points* C' *et* D' *sont situés sur la circonférence* (Σ). (E.-N. Barisien.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par UN ANONYME.

La perpendiculaire FE à AB rencontre (Σ) en E qui est sur la directrice de la parabole (P). La droite qui va de E au



centre O de (Σ) étant un diamètre de (P), cette directrice est la tangente ET à (Σ).

Déterminons C, D, et, pour cela, cherchons le milieu I de CD. Les cordes AB, CD étant également inclinées sur l'axe de (P), le foyer F est à égales distances des diamètres de (P) qui passent par O et I. Il suffit alors de prolonger EF jusqu'en G sur (Σ) et de mener de ce point une parallèle à EO pour avoir le diamètre qui contient I.

Ce point I est aussi sur la perpendiculaire OI à CD. Cette droite et EG, respectivement perpendiculaires à deux droites également inclinées sur EO sont elles-mêmes également inclinées sur EO.

Le point I est alors sur la circonférence qui passe par O, E, G et qui a pour diamètre OT. La droite CD passe par T, qui est sur la directrice, et, comme elle fait avec EO le même angle que TO, sa construction est facile.

On voit déjà que :

Une corde focale quelconque d'une parabole étant prise pour diamètre d'une circonférence de cercle, l'autre sécante, commune à ces deux courbes, coupe cette corde focale sur la directrice de la parabole.

Prenons les symétriques C′, D′ de C, D par rapport à AB, ces points sont sur (Σ). Les diagonales CD′, C′D du trapèze CDC′D′ se coupent sur la polaire de T par rapport à (Σ), c'est-à-dire qu'elles passent par F et l'on a bien FD′ = FD, FC′ = FC. La question posée est donc résolue.

Question 1679.

(1894, p 5*.)

On considère les coniques passant par deux points fixes et tangentes à une droite donnée en un point donné. Lieu du point de concours des tangentes à la conique menées par deux points fixes pris sur la droite.

(André Cazamian.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Représentons par P et Q les deux points fixes; chaque conique passant par ces points est tangente en D à la droite donnée. Soient, en outre, A et B les points fixes de départ des tangentes et C leur point d'intersection.

Effectuons une transformation homographique de la figure, de manière que les points P et Q coïncident avec les ombilics du plan, et soient a, b, c et d les transformés de A, B, C et D.

Il s'agira de chercher le lieu des points d'intersection des tangentes que l'on peut mener de a et b aux circonférences tangentes en un point fixe d à la droite ab. Comme $ca - cb = da - db$, le lieu est une hyperbole admettant a et b comme foyers, ou une ligne droite perpendiculaire en d sur ab si $ad = db$. Revenons à la figure primitive.

Le lieu cherché est une conique passant par D et inscrite dans le quadrilatère ABPQ. Si A, D, B et le point d'intersection de AB et PQ sont quatre points harmoniques, le lieu est une ligne droite passant par D.