GEORGES BROCARD

Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 426-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__426_1>

[P1f]

SUR LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES PLANES;

PAR M. GEORGES BROCARD,
Professeur au lycée du Havre.

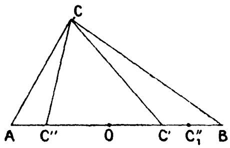
On sait que si l'on joint un point M du plan d'un triangle aux trois sommets, on obtient trois droites qui rencontrent les côtés en des points A', B', C', et que, si l'on désigne par $\frac{\mu}{\lambda}$ et $\frac{\nu}{\mu}$, les valeurs algébriques des rapports $\frac{AC'}{C'B}$ et $\frac{BA'}{A'C}$, le rapport $\frac{CB'}{B'A}$ aura pour valeur algébrique $\frac{\lambda}{\nu}$; les quantités λ, μ, ν sont appelées *coordonnées barycentriques du point* M.

On sait aussi que si l'on considère deux points définis par les coordonnées λ, μ, ν et λ', μ', ν' entre lesquelles existent les relations $\frac{\lambda\lambda'}{a^2} = \frac{\mu\mu'}{b^2} = \frac{\nu\nu'}{c^2}$, ces points sont dits *inverses l'un de l'autre.*

Considérons alors les transversales CC' et CC'' passant par deux points inverses; on aura $\frac{AC'}{C'B} \times \frac{AC''}{C''B} = \frac{b^2}{a^2}$.

Mais si nous prenons le point C''_1 symétrique de C'' par rapport au milieu de AB (la droite CC''_1 est dite *isotomique* de CC''), la relation précédente pourra être écrite ainsi :

Fig. 1.



$$\frac{AC'}{C'B} \times \frac{C''_1 B}{AC''_1} = \frac{b^2}{a^2}$$

ou encore

$$\frac{C'A}{C'B} : \frac{C''_1 A}{C''_1 B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Le premier membre de cette relation est le rapport anharmonique des quatre points C', C''_1, A, B; ce rapport est donc constant et égal à $\frac{b^2}{a^2}$, quels que soient les points inverses considérés.

Or, parmi les points inverses se trouvent les deux points cycliques du plan; résolvons, en effet, par rapport à $\frac{\mu}{\lambda}$ les deux équations

$$a^2\mu\nu + b^2\nu\lambda + c^2\lambda\mu = 0,$$
$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

qui représentent, en coordonnées barycentriques, le cercle circonscrit au triangle et la droite de l'infini; nous obtenons l'équation

$$(1) \qquad a^2\mu^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\lambda\mu + b^2\lambda^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 \pm \sqrt{(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2a^2}$$

ou

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{-2ab\cos C \pm 4iS'}{2a^2}$$
$$= \frac{-2ab\cos C \pm 2abi\sin C}{2a^2} = -\frac{b}{a}e^{\pm Ci}.$$

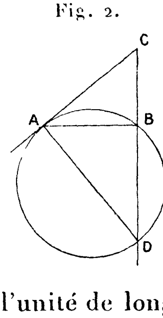
Le produit de ces deux valeurs est bien égal à $\frac{b^2}{a^2}$, comme le montrait immédiatement d'ailleurs l'équation (1). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si, par le sommet* C *d'un triangle* ABC, *on mène une droite isotrope, et la droite isotomique de l'autre droite isotrope, ces droites forment, avec les deux côtés du triangle issus du sommet* C, *un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à* $\frac{b^2}{a^2}$.

Remarques. — 1° Si l'on divise les deux valeurs de $\frac{\mu}{\lambda}$ racines de l'équation (1), on retrouve le théorème de Laguerre.

2° Dans le cas du triangle isocèle ($b = a$), le rapport anharmonique est égal à 1, c'est-à-dire que les deux droites isotropes menées par C sont isotomiques.

Fig. 2.



3° Si a est égal à l'unité de longueur, le rapport anharmonique précédent est le carré du nombre qui mesure AC. On a ainsi le moyen de faire la transformation homographique de la distance de deux points.

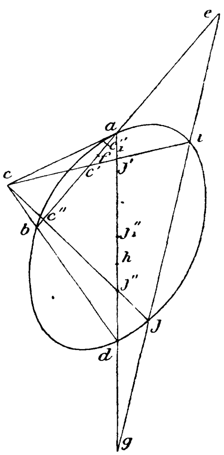
4° Si l'on donne deux longueurs AB, CD sans extrémité commune, on pourra les remplacer par deux autres proportionnelles et ayant une extrémité commune; par exemple, on décrira de A et C comme centres des circonférences ayant leurs rayons proportionnels à AB et CD, et l'on appliquera le théorème précédent au triangle formé par les points A et C et l'un des points de rencontre de ces circonférences.

Application. — Soit à transformer le théorème suivant :

Si d'un point C *extérieur on mène à une circonférence une tangente* CA *et une sécante* CBD, *on a*

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CA}{CD}.$$

Fig. 3.



Soient, dans la transformée :

i et j les transformés des points cycliques;

c' et c'' les points de rencontre de ci et cj avec ab;

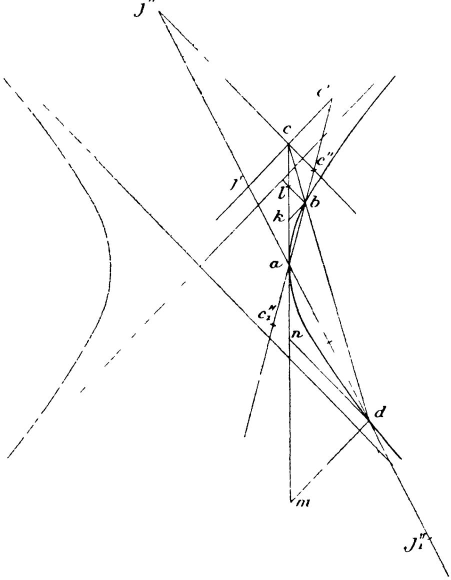
f le conjugué harmonique de e par rapport à ab;

c''_1 celui de c'' par rapport à ef;
j' et j'' les points de rencontre de ci et cj avec ad;
h le conjugué harmonique de g par rapport à ad;
j''_1 celui de j'' par rapport à gh.

Le théorème transformé consiste en ce que les rapports anharmoniques $(c'c''_1ba)$ et $(j'j''_1ad)$ sont égaux.

Nous obtenons ainsi une propriété générale des coniques, d'où nous pouvons déduire des propriétés particulières en donnant à la droite ij, qui est en définitive une droite quelconque, des situations particulières.

Fig. 4.



Supposons, par exemple, que la conique soit une hyperbole et que la droite ij soit à l'infini.

Les droites ci et cj sont alors parallèles aux asymptotes, c''_1 et j''_1 sont symétriques de c'' et j'' par rapport aux milieux de ab et ad, de sorte qu'on a

$$c''_1 b = ac'', \qquad c''_1 a = bc'', \qquad j''_1 a = dj'', \qquad j''_1 d = aj''.$$

L'égalité

$$\frac{c'b}{c'a} : \frac{c''_1 b}{c''_1 a} = \frac{j'a}{j'd} : \frac{j''_1 a}{j''_1 d}$$

devient ainsi

$$\frac{c'b}{c'a} \times \frac{bc''}{ac''} = \frac{j'a}{j'd} \times \frac{aj''}{dj''}$$

ou

$$\frac{c'b}{c'a} \times \frac{c''b}{c''a} = \frac{j'a}{j'd} \times \frac{j''a}{j''d}.$$

Or, en menant par les points b et d des parallèles aux asymptotes, qui rencontrent la tangente aux points l, k, n, m, on voit facilement que cette égalité devient

$$\frac{ck}{ca} \times \frac{cl}{ca} = \frac{ca}{cm} \times \frac{ca}{cn},$$

d'où

$$ca^4 = ck.cl.cm.cn.$$

Mais on a aussi

$$\frac{cl}{cn} = \frac{ck}{cm} = \frac{cb}{cd}.$$

Donc $cl \times cm = ck \times cn = ca^2$. D'où ce théorème :

Si d'un point extérieur on mène à une hyperbole une tangente et une sécante, et qu'on projette sur la tangente les deux segments de la sécante suivant des droites respectivement parallèles aux deux asymptotes, le produit des segments ainsi projetés est constant et égal au carré de la tangente.

On trouvera facilement d'une façon analogue, en supposant que la conique soit une parabole et la droite ij à l'infini, le théorème suivant :

Si d'un point extérieur on mène à une parabole une tangente et une sécante et que l'on projette sur *la tangente, parallèlement à l'axe, les deux segments de la sécante, le produit des segments ainsi projetés est constant et égal au carré de la tangente.*