NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. MANGEOT

Étude analytique sur la symétrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 403-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__403_1>

[M²3f] [M¹2f]

ÉTUDE ANALYTIQUE SUR LA SYMÉTRIE;

Par M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

Soit F une courbe plane algébrique rapportée à deux axes rectangulaires situés dans son plan, ou une surface algébrique rapportée à trois axes rectangulaires quelconques.

De l'équation entière et cartésienne $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$, de la figure F, on peut déduire une infinité d'équations représentant des courbes ou surfaces qui admettent tous les centres, axes ou plans de symétrie que peut avoir cette figure. De ce nombre sont, ainsi qu'il est facile de le vérifier, celles que l'on obtient en annulant les fonctions

$$U(f) = \frac{\partial^2 f}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$V_k(f) = \sum \frac{P_k}{P_\alpha P_\beta P_\gamma} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \right)^2, \qquad (\alpha + \beta + \gamma = k),$$

où k désigne un entier quelconque, fonctions qui sont des covariants de f pour toute substitution orthogonale, et dont la seconde se forme, comme l'on voit, en remplaçant dans le développement de $(x + y + z)^k$ chaque terme tel que $A x^\alpha y^\beta z^\gamma$ par $A \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \right)^2$.

Parmi toutes ces courbes ou surfaces se trouvent des coniques ou quadriques, et comme l'on sait déterminer les symétries de celles-ci, on voit qu'il sera généralement possible de tirer parti de ce résultat si l'on veut rechercher les symétries que peut avoir la figure F. C'est là le problème que je me propose de traiter ([1]), en le limitant ici à la recherche des axes ou plans de symétrie de la courbe ou surface F.

Je crois bon d'indiquer, à ce sujet, la proposition suivante, que l'on démontre aisément :

Pour que la surface représentée par l'équation entière $f = 0$ soit symétrique par rapport à un plan (P) ayant l'équation

$$\mathrm{P} = ax + by + cz + d = 0,$$

il faut et il suffit que $\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(h)}$ soit divisible par P pour les valeurs impaires de h, ou que, en posant

$$f_k = \left(a\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + b\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} + c\frac{\partial f_{k-1}}{\partial z}\right) : \mathrm{P},$$

avec $f_0 = f$, f_k soit une fonction entière quel que soit k, ou bien que $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}$ soit divisible par P, et que le quotient, égalé à zéro, définisse une surface symétrique par rapport à (P), ou encore que

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}$$

étant divisible par P, le plan (P) soit plan de symétrie de la surface correspondant à l'équation $\mathrm{U}(f) = 0$.

([1]) Si l'on connaît l'existence et la position d'un centre, d'un axe ou d'un plan de symétrie dans une courbe plane ou surface algébrique d'ordre inférieur à 6, on peut ramener la construction d'un point quelconque de cette courbe ou surface à la construction des racines d'une équation du second degré ou d'une équation bicarrée.

Cette proposition équivaut à une propriété des courbes planes lorsque le polynome f est indépendant de z, puisque l'on doit supposer c nul.

RÈGLES PRATIQUES POUR LA RECHERCHE DES AXES DES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

1° *Axes parallèles à l'axe des x.* — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation entière de la courbe considérée C, rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy. Si le polynome f est indépendant de y, C est symétrique par rapport à toutes les parallèles à Ox. Dans le cas contraire, et $Ay^q + By^{q-1} + \ldots$ étant ce polynome ordonné suivant les puissances décroissantes de y, si q est impair, ou si, q étant pair, le rapport $\frac{B}{A}$ n'a pas une valeur constante, la courbe n'a pas d'axe parallèle à Ox. Lorsque, q étant pair, $\frac{B}{A}$ a une valeur constante g, la droite $qy + g = 0$ est la seule des parallèles à Ox qui puisse être axe de la courbe C.

2° *Axes passant par l'origine.* — Soit $\Sigma\varphi_n(x, y)$ le polynome f ordonné par groupes homogènes. Pour qu'une droite passant par l'origine O des coordonnées soit axe de la courbe C, il faut et il suffit qu'elle soit axe de chacun des faisceaux de droites correspondant aux formules $\varphi_n(x, y) = 0$. Je suppose réels les coefficients de f et je vais donner une méthode générale pour rechercher les axes du faisceau de n droites représenté par l'équation $\varphi_n(x, y) = 0$. Je transforme le polynome $\varphi_n(x, y)$ par la substitution

$$u = x + yi, \qquad v = x - yi;$$

il devient une fonction homogène de u et v que j'or-donne suivant les puissances décroissantes de u, ne la supposant pas réduite à un seul terme; puis, associant deux à deux les termes équidistants des deux termes extrêmes, j'écris ainsi cette fonction

$$\begin{aligned}(\alpha_n u^n + \beta_n v^n) + uv(\alpha_{n-2} u^{n-2} + \beta_{n-2} v^{n-2})\\ + (uv)^2(\alpha_{n-4} u^{n-4} + \beta_{n-4} v^{n-4})\\ + (uv)^3(\alpha_{n-6} u^{n-6} + \beta_{n-6} v^{n-6}) + \ldots\end{aligned}$$

En y faisant $x = yi$ et $x = -yi$, on voit que les constantes α_n et β_n doivent être conjuguées. La fonction de x et y, $\alpha_n u^n + \beta_n v^n$, a ses coefficients réels et, par suite aussi, sa différence avec $\varphi_n(x, y)$; cette différence doit être divisible par $uv = x^2 + y^2$, et le quotient de la division aura, comme $\varphi_n(x, y)$, ses coefficients réels, d'où il résulte que les constantes α_{n-2}, β_{n-2} doivent être aussi conjuguées. On voit que, d'une manière générale, les constantes α_k, β_k sont conjuguées pour toutes les valeurs de k. Je poserai $\alpha_k = a_k + b_k i$.

Je considère maintenant une droite A, menée par l'origine et faisant avec Ox l'angle ω. Si l'on prend cette droite comme axe des abscisses et la perpendiculaire menée par O pour axe des ordonnées et que l'on désigne par $\psi(X, Y)$ la somme des termes de degré impair en Y dans la nouvelle équation du faisceau considéré, on a

$$\begin{aligned}\psi(X, Y) = \sum (a_k \sin k\omega + b_k \cos k\omega)\\ \times (X^2 + Y^2)^{\frac{n-k}{2}} (C_k^1 X^{k-1} Y - C_k^3 X^{k-3} Y^3 + \ldots),\end{aligned}$$

k devant recevoir les valeurs n, $n-2$, $n-4$, ... Si A est un axe du faisceau, on doit avoir $\psi(X, Y) \equiv 0$, et, en particulier, $\psi(X, iX) \equiv 0$, ce qui exige que la somme $a_n \sin n\omega + b_n \cos n\omega$ soit nulle. Le quotient de $\psi(X, Y)$ par $X^2 + Y^2$ doit être nul aussi identiquement, et, devant l'être en particulier pour $Y = iX$, il faut que la somme $a_{n-2} \sin \overline{n-2\,\omega} + b_{n-2} \cos \overline{n-2\,\omega}$ soit nulle. En continuant ce raisonnement, on voit que l'on doit avoir

$$(1) \qquad a_k \sin k\omega + b_k \cos k\omega = 0$$

pour toutes les valeurs de k. Réciproquement, si un nombre ω vérifie toutes les équations (1), on aura, pour cette valeur de ω, $\psi(X, Y) \equiv 0$ et la droite A qui, menée par O, fait l'angle ω avec Ox, sera un axe du faisceau (φ_n).

La relation (1) exprime que la droite A fait partie du système de droites défini par l'équation

$$(2) \qquad \alpha_k u^k = \beta_k v^k.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau (φ_n) ait des axes est que toutes les équations binomes (2), où l'on regarderait $\frac{u}{v}$ comme une inconnue, aient des racines communes [1]. Soit $A_n u^h = B_n v^h$ l'équation dont les racines $\frac{u}{v}$ sont ces racines communes, lorsqu'elles existent. Le faisceau aura h axes définis par la formule

$$A_n(x + yi)^h = B_n(x - yi)^h.$$

L'application de la méthode que je viens d'indiquer à chacun des faisceaux correspondant aux divers groupes

---

[1] Les droites (2) sont les axes du faisceau défini par l'équation $\alpha_k u^k + \beta_k v^k = 0$; d'où il suit que la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau (φ_n) ait des axes est aussi que tous les faisceaux correspondant aux équations

$$\alpha_n u^n + \beta_n v^n = 0, \qquad \alpha_{n-2} u^{n-2} + \beta_{n-2} v^{n-2} = 0, \qquad \ldots$$

aient des axes communs, qui sont les axes du faisceau (φ_n).

homogènes qui composent f conduit à la règle suivante :

Pour rechercher les axes passant par l'origine O *de la courbe* C *définie par l'équation entière et à coefficients réels* $f(x, y) = 0$ *(en coordonnées rectangulaires), je développe le polynome* $f[x+y, i(y-x)]$, *et, groupant ses termes deux à deux, je l'écris sous la forme d'une somme d'expressions telles que*

$$(xy)^p(\alpha_k x^k + \beta_k y^k)$$

$(p = 0$ *ou* $> 0)$: *soient* $\alpha_r x^r + \beta_r y^r$, $\alpha_s x^s + \beta_s y^s$, ... *ceux des binomes* $\alpha_k x^k + \beta_k y^k$ *qui ne sont pas réduits à des constantes. Si les binomes en* z

$$\alpha_r z^r - \beta_r, \quad \alpha_s z^s - \beta_s, \quad \ldots$$

sont premiers entre eux, la courbe C *n'a pas d'axe passant par* O. *Dans le cas contraire, si* $Az^t - B$ *est le plus grand commun diviseur de ces binomes, la courbe a* t *axes passant par* O : *ils sont définis par la formule*

$$(3) \qquad A(x+yi)^t = B(x-yi)^t.$$

Quand toutes les expressions $\alpha_k x^k + \beta_k y^k$ *sont constantes, la courbe est un système de cercles ayant leur centre en* O, *et toutes les droites qui passent par ce point en sont des axes.*

3° *Axes placés d'une manière quelconque.* — Si la courbe C, dont je désigne le degré par m, a des axes, chacun d'eux doit être axe de la conique Γ représentée par l'équation

$$\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-1}}\right)^2 + C_{m-1}^1 \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-2}\,\partial y}\right)^2 + \ldots + C_{m-1}^n \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-n-1}\,\partial y^n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial y^{m-1}}\right)^2 = 0.$$

De là la méthode qui suit pour reconnaître si la courbe C a des axes, et pour les déterminer.

Lorsque la conique Γ a un nombre fini d'axes, on détermine séparément leurs équations et l'on essaye si chacun d'eux est axe de C. Lorsque Γ est un cercle, on détermine son centre et l'on est ramené à trouver les axes de C qui passent par ce point, que l'on prendra pour origine des coordonnées. Lorsque Γ est formée de deux droites parallèles, on essaye si la ligne des centres de Γ est axe de C, et l'on a ensuite à chercher les axes de C qui seraient parallèles à la normale à cette ligne des centres, normale que l'on prendra pour axe des abscisses [1].

Réduction de l'équation d'une courbe qui a des axes. — Je suppose que, les coefficients de f étant réels, la

---

[1] J'indiquerai, au sujet de cette théorie, les deux résultats suivants :

1° Si $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + A_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + A_m y^m$ est la somme des termes du $m^{\text{ième}}$ degré de f, l'inclinaison ω de tout axe de la courbe C doit vérifier la formule

$$\operatorname{tang} m\omega (A_0 - A_2 + A_4 - \ldots) = A_1 - A_3 + A_5 - \ldots,$$

qui résulte de l'équation $\alpha_m u^m = \beta_m v^m$ où l'on fait $y = x \operatorname{tang}\omega$.

2° Si l'on connaît la direction $y = \mu x$ d'un axe de la courbe C, on peut obtenir l'équation de cet axe en annulant le quotient des deux expressions

$$\left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2p-1)}, \qquad \left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2p-2)},$$

où p désigne la plus petite des valeurs de h pour lesquelles l'expression $\left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(h)}$ est nulle identiquement. Lorsque le degré m de la courbe est pair, si l'axe n'est pas perpendiculaire à une direction asymptotique de la courbe, l'équation de cet axe est

$$\left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(m-1)} = 0.$$

courbe C admette plus de deux axes, sans en avoir une infinité. On peut rapporter la courbe à l'un d'eux, D, pris comme nouvel axe des abscisses, et à une perpendiculaire à D, sans connaître l'équation de D, en opérant de la manière suivante :

Les axes de C passent par un même point, qui est le centre O′ de la conique Γ. On transporte l'origine au point O′, et l'on sait calculer la formule (3) qui définit l'ensemble de ces axes. Ayant trouvé $A = p + qi$, $B = p - qi$, soit α l'angle compris entre o et π, dont la tangente est $-\frac{q}{p}$. L'un des angles ω satisfaisant à la formule $\operatorname{tang}\omega = -\frac{q}{p}$, qui donne les inclinaisons des axes sur Ox, est $\frac{\alpha}{t}$, et je supposerai que l'axe D, que je prends pour nouvel axe des abscisses, est celui qui fait cet angle $\frac{\alpha}{t}$ avec Ox; le nouvel axe des ordonnées sera pris passant par O′. La fonction

$$w_k = \alpha_k(x + yi)^k + \beta_k(x - yi)^k$$

devient, par ce changement de coordonnées,

$$\begin{aligned} w'_k = \;& \alpha_k\left(\cos\frac{k}{t}\alpha + i\sin\frac{k}{t}\alpha\right)(X - Yi)^k \\ & + \beta_k\left(\cos\frac{k}{t}\alpha - i\sin\frac{k}{t}\alpha\right)(X - Yi)^k. \end{aligned}$$

Mais D étant aussi axe du faisceau $w_k = 0$, w'_k ne doit pas contenir de puissances impaires de Y, ce qui exige la condition

$$\alpha_k\left(\cos\frac{k}{t}\alpha + i\sin\frac{k}{t}\alpha\right) = \beta_k\left(\cos\frac{k}{t}\alpha - i\sin\frac{k}{t}\alpha\right),$$

d'où l'on déduit

$$\cos\frac{k}{t}\alpha = \frac{a_k}{\pm\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \qquad \sin\frac{k}{t}\alpha = \frac{-b_k}{\pm\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Alors on a

$$w'_k = \pm\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\,[(X + Yi)^k + (X - Yi)^k].$$

Le signe à prendre dans cette dernière formule est le même que celui qui doit figurer dans les deux précédentes. Or celui-ci est connu, car on connaît, en grandeur et en signe, les sinus et cosinus de l'angle α, et, par suite, ceux de l'angle $\frac{k}{t}\alpha$, qui est un multiple de α. On connait donc la nouvelle équation de C, dont le premier membre est la somme d'expressions telles que $(X^2 + Y^2)^n w'_k$, toutes connues.

SUR LA DÉTERMINATION DES PLANS DE SYMÉTRIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES.

Dans tout ce qui va suivre, je supposerai les surfaces rapportées à des axes de coordonnées rectangulaires et définies par des équations cartésiennes.

Problème I. — *Sachant qu'une surface algébrique ne peut être symétrique que par rapport à certains plans* P *totalement connus ou par rapport à des plans appartenant à des familles connues de plans n'ayant pas toutes les directions de l'espace, reconnaître si cette surface admet des plans de symétrie et, le cas échéant, les déterminer.*

On vérifie directement si chacun des plans P (plan dont on connaît l'équation) est un plan de symétrie de la surface.

S'il y a une famille de plans parallèles à un plan donné Δ, on prend ce plan pour plan des xy, et soit

$$A z^q + B z^{q-1} + \ldots = 0.$$

la nouvelle équation entière de la surface, ordonnée suivant les puissances décroissantes de z ([1]). Pour que la surface ait un plan de symétrie parallèle à Δ, il faut que q soit pair et que $\frac{B}{A}$ ait une valeur constante g; et l'équation de ce plan est $qz + g = 0$. On aura donc à essayer si le plan que définit cette équation est un plan de symétrie de la surface.

S'il y a une famille de plans perpendiculaires à un plan connu Δ', ce qui est le dernier cas à considérer, on prend celui-ci pour plans des xy, et A, B, C... désignant les coefficients des différentes puissances de z dans la nouvelle équation entière de la surface, on cherche les axes de symétrie communs des courbes du plan Δ' qui sont représentées par les équations obtenues en annulant celles des fonctions A, B, C,... qui ne sont pas des constantes. Lorsque ces courbes n'ont aucun axe commun, la surface n'a aucun plan de symétrie perpendiculaire à Δ'. Dans le cas contraire, en menant par chacun des axes communs un plan, perpendiculaire au plan de ces courbes, on obtient des plans de symétrie de la surface, et l'on a ainsi tous ceux qui sont perpendiculaires au plan Δ' ([2]).

Théorème. — *La détermination des plans de symétrie de la surface représentée par l'équation entière $f(x, y, z) = 0$, de degré m, peut être effectuée au moyen de la quadrique qui a pour équation $V_{m-1}(f) = 0$, toutes les fois que cette quadrique n'est pas une sphère.*

([1]) Si cette équation ne contenait pas z, tous les plans parallèles à Δ seraient des plans de symétrie de la surface.

([2]) La résolution de ce problème par les méthodes que j'ai indiquées ne comporte aucun calcul d'élimination.

En effet, si la surface a des plans de symétrie, ils doivent se trouver parmi les plans principaux de cette quadrique; or ceux-ci font partie des plans énumérés dans l'énoncé du problème qui précède, puisque l'on suppose la quadrique différente d'une sphère [1].

MÉTHODES PRATIQUES POUR LA RECHERCHE DES PLANS DE SYMÉTRIE DES SURFACES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE.

Surfaces du troisième ordre. — Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation entière et à coefficients réels d'une surface de troisième ordre S, dont il s'agit de rechercher les plans de symétrie. J'admets que cette surface n'est pas formée de trois plans parallèles.

Je considère les deux surfaces α et β représentées par les équations

$$U(f) = 0, \qquad V_2(f) = 0,$$

dont la première est au plus du premier degré, et dont la seconde est du deuxième degré. Tout plan de symétrie de S doit être un plan de symétrie de chacune de ces deux surfaces.

Si, comme il arrivera généralement, le plan α est déterminé et à distance finie, on saura trouver ceux de ses plans de symétrie qui sont plans de symétrie de S (problème I), et la question sera résolue.

---

[1] Lorsque cette quadrique est une sphère, de centre (x_0, y_0, z_0), si $\Sigma\varphi_n(x, y, z)$ désigne le polynome $f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$ ordonné par groupes homogènes, il suffira, d'après le problème I, de savoir déterminer les plans de symétrie de l'un des cônes $\varphi_n = 0$ qui ne sont pas réduits à une sphère simple ou multiple, pour savoir déterminer les plans de symétrie de la surface, ceux-ci devant se trouver parmi ceux-là.

Dans le cas contraire, j'aurai recours à la quadrique β. Si cette quadrique n'est pas une sphère, on saura reconnaître ceux de ses plans de symétrie qui sont plans de symétrie de S (problème I). Si β est une sphère, le cône asymptotique de S est formé de trois plans perpendiculaires deux à deux ([1]). Je transporte l'origine des coordonnées au centre ω de la sphère β, et soit

$$F(x,y,z)+\varphi(x,y,z)=0$$

la nouvelle équation entière de S, F désignant les termes du troisième degré. L'équation $\varphi(x,y,z)=0$ représente une surface S_1 qui est au plus du second ordre. Les plans de symétrie de S doivent passer par ω et sont tous les plans de symétrie de S_1 qui seraient en même temps plans de symétrie du cône (F) défini par l'équation

$$F(x,y,z)=0.$$

Si la fonction φ n'est pas de la forme

$$A(x^2+y^2+z^2)+B,$$

([1]) Pour démontrer ce résultat, on peut, les premiers membres des équations de α et β étant des covariants de f, prendre l'équation de S sous la forme, à coefficients réels,

$$\begin{aligned} ay^3+bz^3+3cy^2z+3dyz^2+3hz^2x \\ +3kzx^2+3nxy^2+6gxyz+\ldots=0, \end{aligned}$$

où je n'écris que les termes du troisième degré. Alors les équations de α et β sont

$$(h+n)x+(a+d)y+(b+c+k)z+\text{const.}=0,$$

$$\begin{aligned} k^2z^2+(nx+ay+cz)^2+(hx+dy+bz)^2+2(ny+gz)^2 \\ +2(kx+gy+hz)^2+2(gx+cy+dz)^2+\psi=0, \end{aligned}$$

ψ ne renfermant aucun terme du second degré. Or, si l'on suppose $n=-h$, $d=-a$, $k=-(b+c)$, les conditions pour que β soit une sphère sont

$$a=b=ch=0.$$

A et B étant constants, la considération de la surface S_1 permettra de trouver les plans de symétrie de S (problème I). Dans le cas contraire, ces plans sont les plans de symétrie du cône (F), c'est-à-dire les six bissecteurs des angles formés par les trois plans rectangulaires auxquels se reduit actuellement ce cône. Les trois droites communes aux trois cônes du second ordre

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

sont les arêtes du trièdre trirectangle (F), et l'on saura par conséquent calculer les équations séparées des trois faces de ce trièdre et par suite celles des six plans de symétrie de la surface S (¹).

Dans les surfaces de troisième ordre, qui possèdent la symétrie plane sans être cylindriques ni de révolution, le nombre des plans de symétrie est l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 6.

Le Tableau suivant fait connaître la forme à laquelle on peut ramener l'équation de celles de ces surfaces qui ont plusieurs plans de symétrie.

(¹) J'indique incidemment ce procédé pour reconnaître si la surface S est formée de trois plans perpendiculaires deux à deux. D'abord elle doit avoir un centre unique, que je détermine. Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de ce point, la fonction $f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$ doit être homogène. Le plan α doit être indéterminé, et la quadrique β doit être une sphère. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes, et l'on sait calculer les équations des trois plans.

Nombre des plans de symétrie.	Positions relatives de ces plans.	Forme à laquelle peut se ramener l'équation de la surface.
2	Ils sont rectangulaires.	$z = \dfrac{ax^2 + by^2 + d}{a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + d_1}$,
3	Ils passent par une même droite et font 2 à 2 l'angle de 60°.	$z = \dfrac{a(x^3 - 3xy^2) + b(x^2 + y^2) + d}{a_1(x^2 + y^2) - c_1z^2 + d_1}$,
4	Trois d'entre eux passent par une même droite et font 2 à 2 l'angle de 60°; le quatrième est perpendiculaire à cette droite.	$z^2 = a(x^3 - 3xy^2) + b(x^2 + y^2) + d$,
6	Ils sont les bissecteurs d'un trièdre trirectangle.	$xyz + a(x^2 + y^2 + z^2) + b = 0.$

On saura calculer la forme réduite qui correspond à chacun de ces quatre cas.

Surfaces du quatrième ordre. — Je commence par traiter deux questions relatives aux cônes du quatrième ordre.

PROBLÈME II. — *Reconnaître si un cône du quatrième ordre* C, *non formé de deux sphères de rayon nul, et défini par son équation, admet les neuf plans de symétrie du cube, et, en cas d'affirmative, trouver les équations séparées de ces neuf plans.*

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation entière du cône C rapporté à son sommet. Pour qu'il ait la symétrie du cube, il est nécessaire et suffisant, ainsi qu'il résulte d'une formule générale donnée par M. Goursat [1], que l'on

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, juin 1887.

ait identiquement

$$F(x,y,z) \equiv \lambda(x^2+y^2+z^2)^2 + \mu(P^4+Q^4+R^4),$$

λ, μ étant deux constantes et P, Q, R trois formes linéaires

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z, \qquad Q = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$R = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

dont les coefficients sont les cosinus directeurs de trois droites rectangulaires deux à deux.

Si F satisfait à l'identité précédente, les trois dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ doivent vérifier celles-ci

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \equiv \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\mu(\alpha^2 P^2 + \alpha'^2 Q^2 + \alpha''^2 R^2), \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \equiv \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 12\mu(\beta^2 P^2 + \beta'^2 Q^2 + \beta''^2 R^2), \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \equiv \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 12\mu(\gamma^2 P^2 + \gamma'^2 Q^2 + \gamma''^2 R^2), \end{cases}$$

où l'on pose

$$u = (x^2+y^2+z^2)^2.$$

Réciproquement, si l'on peut trouver un système des deux constantes λ, μ et des trois fonctions P, Q, R, tel que les identités (4) aient lieu, le cône C aura la symétrie du cube, car, en vertu de ces identités, la fonction

$$F - \lambda(x^2+y^2+z^2)^2 - \mu(P^4+Q^4+R^4)$$

doit avoir chacune des formes homogènes

$$x\psi(y,z) + \chi(y,z), \qquad y\psi_1(z,x) + \chi_1(z,x),$$
$$z\psi_2(x,y) + \chi_2(x,y),$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les six fonctions ψ, χ, ψ_1, χ_1, ψ_2, χ_2 sont nulles identiquement.

J'ajoute que les identités (4) ne peuvent être vérifiées par un second système des constantes et des formes linéaires considérées, car si l'on a

$$F \equiv \lambda u + \mu(P^4 + Q^4 + R^4) \equiv \lambda_1 u + \mu_1(P_1^4 + Q_1^4 + R_1^4).$$

on en déduit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \equiv 12(\lambda + \mu)(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$\equiv 12(\lambda_1 + \mu_1)(x^2 + y^2 + z^2),$$

ce qui exige $\lambda_1 + \mu_1 = \lambda + \mu$, et l'on doit avoir alors

$$\mu(Q^2R^2 + R^2P^2 + P^2Q^2) \equiv \mu_1(Q_1^2R_1^2 + R_1^2P_1^2 + P_1^2Q_1^2),$$

d'où

$$P_1 \equiv P, \qquad Q_1 \equiv Q, \qquad R_1 \equiv R, \qquad \mu_1 = \mu.$$

Ceci posé, je considère les trois cônes du second ordre C_1, C_2, C_3, qui ont pour équations

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \lambda x^2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \lambda y^2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \lambda z^2.$$

Si, pour aucune valeur de λ, ces trois cônes n'ont pas trois plans de symétrie communs, le cône C n'aura pas la symétrie du cube, car, s'il possédait une telle symétrie, les trois cônes C_1, C_2, C_3 devraient, d'après les identités (4), être symétriques par rapport à chacun des trois plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

Je suppose, en second lieu, qu'il existe des valeurs de λ pour lesquelles les trois cônes C_1, C_2, C_3 aient au moins trois plans de symétrie communs. Pour chacune d'elles, ils auront certainement en commun trois plans de symétrie rectangulaires, dont je prends les équations

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad Q = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0,$$
$$R = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0$$

en fonction des cosinus directeurs des normales à ces trois plans. Si, pour une de ces valeurs de λ et pour une valeur convenable de μ, les identités (4) ont lieu, le cône C aura les neuf plans de symétrie du cube, et ces plans seront les trois plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, et les bissecteurs des angles qu'ils forment deux à deux. Si, pour aucune de ces valeurs de λ, il est impossible de satisfaire aux identités (4) avec une même valeur de μ, le cône C n'aura pas la symétrie du cube.

Théorème. — *Étant donnée l'équation entière et homogène $F(x, y, z) = 0$ d'un cône du quatrième ordre C, si les deux surfaces α_1, γ_1, qui ont pour équations $U(F) = 0$, $V_3(F) = 0$, sont deux sphères, finies ou infinies, le cône C n'admet aucun plan de symétrie, ou bien il a les neuf plans de symétrie d'un cube.*

En effet, je suppose que le cône C ait un plan de symétrie quelconque. Son équation peut être ramenée à la forme

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) = \lambda z^4 + z^2(Ax^2 + By^2)& \\ + ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + gy^4 &= 0,\end{aligned}$$

pour laquelle les équations des surfaces α_1 et γ_1 sont

$$\begin{aligned}[A + 6(a + c)]x^2 + [B + 6(g + c)]y^2& \\ + (A + B + 6\lambda)z^2 + 12(b + d)xy &= 0,\\ A^2x^2 + B^2y^2 + (A^2 + B^2 + 12\lambda^2)z^2& \\ + 12[(ax + by)^2 + (dx + gy)^2]& \\ + 36[(bx + cy)^2 + (cx + dy)^2] &= 0.\end{aligned}$$

Les six relations qui expriment que ces deux surfaces α_1, γ_1 sont deux sphères peuvent s'écrire

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} d = -b, \qquad b(a - g) = 0, \\ A = 6(g + c - \lambda), \qquad B = 6(a - c - \lambda), \\ (a - g)(a + g + 3c - 3\lambda) = 0, \\ 2\lambda^2 - 3(a + c)\lambda + a^2 - 2b^2 + 3ac = 0. \end{array}\right.$$

La seconde conduit à faire deux hypothèses :

1° $g = a$. Alors $A = B = 6(a + c - \lambda)$, et l'on a

$$\begin{aligned}\Phi = \lambda z^4 + 6(a + c - \lambda)z^2(x^2 + y^2)\\ + a(x^4 + y^4) + 4b(x^3y - xy^3),\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de la dernière des relations (5),

$$\begin{aligned}\Phi = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 + [6(a + c) - 8\lambda]z^2(x^2 + y^2)\\ + [\sqrt{a - \lambda}(x^2 - y^2) + xy\sqrt{2a + 6c - 4\lambda}]^2.\end{aligned}$$

Or, par une transformation de coordonnées effectuée dans le plan des xy, la fonction du second degré comprise entre crochets peut être ramenée à la forme $xy\sqrt{6(a + c) - 8\lambda}$, et la fonction Φ devient

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 + [6(a + c) - 8\lambda](y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2).$$

Donc le cône C a la symétrie du cube.

2° $b = 0$. Alors $d = 0$, $3\lambda = a + g + 3c$, $A = 2(2g - a)$, $B = 2(2a - g)$, et la dernière des relations (5) se décompose en ces deux-ci

$$3c = 2a - g, \qquad 3c = 2g - a.$$

Soit, pour fixer les idées, $c = \frac{2a - g}{3}$. On a

$$\begin{aligned}\Phi &= az^4 + 2z^2[(2g - a)x^2 + (2a - g)y^2]\\ &\quad + ax^4 + gy^4 + 2(2a - g)x^2y^2\\ &= (2a - g)(x^2 + y^2 + z^2)^2\\ &\quad + (g - a)[2y^4 + (x^2 + z^2)^2 + 4x^2z^2].\end{aligned}$$

Or, si l'on fait tourner de 45° les axes des x et des z dans leur plan, cette fonction Φ devient

$$g(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(a - g)(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2),$$

et l'on voit que, dans ce cas encore, le cône C a la symétrie du cube.

J'ajoute que, réciproquement, si le cône C possède la symétrie du cube, les deux cônes α_1 et γ_1 sont deux sphères.

Je considère maintenant une surface quelconque du quatrième ordre S, représentée par l'équation entière $f(x, y, z) = 0$, et je me propose de rechercher ses plans de symétrie. Je désigne par α et γ les deux surfaces qui ont pour équations

$$U(f) = 0, \qquad V_3(f) = 0.$$

La surface γ est *du second ordre*. La surface α est *au plus du second ordre*. Tout plan de symétrie de S doit être un plan de symétrie de chacune de ces deux surfaces.

Je distingue deux cas :

1° *Les deux surfaces α et γ ne sont pas deux sphères concentriques (la surface α pouvant être une sphère située tout entière à l'infini).*

Je détermine les plans de symétrie des deux surfaces α, γ.

Si elles n'en ont pas en commun, la surface S n'admet aucun plan de symétrie. Si elles ont des plans de symétrie communs, les directions de ces plans sont totalement déterminées ou ne dépendent que d'un seul paramètre; donc on saura reconnaître ceux de ces plans qui seraient des plans de symétrie de S (problème I).

2° *Les deux surfaces α, γ sont deux sphères concentriques (la sphère α pouvant être tout entière à l'infini).*

Je transporte l'origine au centre commun ω de ces deux sphères, et soit

$$F(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = 0$$

la nouvelle équation de S, $F(x, y, z)$ désignant l'ensemble des termes du quatrième degré. L'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ représente une surface S_1 qui est au plus du troisième ordre et dont on sait par conséquent trouver tous les plans de symétrie. Les plans de symétrie de S doivent passer par le point ω et sont tous les plans de symétrie de S_1 qui seraient en même temps plans de symétrie du cône (F) défini par l'équation $F(x, y, z) = 0$. Je laisse de côté le cas où S serait formée de deux sphères concentriques. Quand $\varphi(x, y, z)$ n'a pas la forme $A(x^2 + y^2 + z^2) + B$, A et B étant des constantes, les plans de symétrie de S_1 passant par ω n'ont pas toutes les directions de l'espace, et l'on saura alors reconnaître ceux de ces plans qui seraient plans de symétrie de S (problème I). Dans l'hypothèse contraire, les plans de symétrie de S sont les mêmes que ceux du cône (F). Mais les deux surfaces α, γ étant des sphères, il en est de même des deux surfaces α_1, γ_1 relatives au cône (F). Donc ici la surface S n'a aucun plan de symétrie, ou a les neuf plans de symétrie d'un cube. Il n'y aura dès lors qu'à résoudre le problème II sur le cône (F).

Si (F) admet les neuf plans de symétrie du cube, on déterminera leurs équations, et l'on aura les plans de symétrie de S. Si le cône (F) n'a pas la symétrie du cube, la surface S n'admet aucun plan de symétrie.

Le problème est donc entièrement résolu.

Dans les surfaces du quatrième ordre qui possèdent la symétrie plane sans être cylindriques ni de révolution, le nombre des plans de symétrie est l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9.

Le Tableau suivant indique la forme à laquelle on peut ramener l'équation de celles de ces surfaces qui admettent plusieurs plans de symétrie.

Nombre des plans de symétrie.	Positions relatives de ces plans.	Forme à laquelle peut se ramener l'équation de la surface.
2	Ils sont rectangulaires.	(1) $\begin{cases} Az^4 + Bz^2(ax^2+by^2+c) \\ \quad + Cz(a_1x^2+b_1y^2+c_1) + a_2x^4 \\ \quad + b_2x^2y^2 + c_2y^4 + d_2x^2 + h_2y^2 + k_2 = 0. \end{cases}$
3	1° Ils sont rectangulaires deux à deux;	Forme (1) où l'on fait $C = 0$.
	2° Ils passent par une même droite et font deux à deux l'angle de 60°.	(2) $\begin{cases} Az^4 + Bz^2(x^2+y^2+c) \\ \quad + Cz[a_1(x^3-3xy^2)+b_1(x^2+y^2)+c_1] \\ \quad + a_2(x^3-3xy^2)+b_2(x^2+y^2)^2+c_2(x^2+y^2)+d_2=0. \end{cases}$
4	1° Trois d'entre eux passent par une même droite et font deux à deux l'angle de 60°; le quatrième est perpendiculaire à cette droite;	Forme (2) où l'on fait $C = 0$.
	2° Ils passent par une même droite et font deux à deux l'angle de 45°.	(3) $\begin{cases} Az^4 + Bz^2(x^2+y^2+c) + Cz(x^2+y^2+c_1) \\ \quad + a_2(x^4-6x^2y^2+y^4) \\ \quad + b_2(x^2+y^2)^2 + c_2(x^2+y^2) + d_2 = 0. \end{cases}$
5	Quatre d'entre eux passent par une même droite et font deux à deux l'angle de 45°; le cinquième est perpendiculaire à cette droite.	Forme (3) où l'on fait $C = 0$.
6	Ils sont les bissecteurs d'un trièdre trirectangle.	(4) $\begin{cases} A(x^2+y^2+z^2)^2 + B(x^4+y^4+z^4) \\ \quad + Cxyz + D(x^2+y^2+z^2) + E = 0. \end{cases}$
9	Ils sont les faces et les bissecteurs d'un même trièdre trirectangle.	Forme (4) où l'on fait $C = 0$.

On saura calculer la forme réduite qui correspond à chacun de ces six cas ([1]).

SUR UN MOYEN DE RECONNAITRE SI UNE SURFACE DU TROISIÈME, DU QUATRIÈME OU DU CINQUIÈME ORDRE EST DE RÉVOLUTION.

Je considère une surface algébrique S, autre qu'un système de plans parallèles, et dont l'ordre m est l'un des nombres 3, 4, 5. Je la suppose définie, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, par l'équation entière et à coefficients réels $f(x, y, z) = 0$. Soient α et α' les deux surfaces que représentent les équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

$$\sum \frac{P_{m-1}}{P_\lambda P_\mu P_\nu} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu} \right)^2 = 0 \qquad (\lambda + \mu + \nu = m - 1),$$

dont la seconde est du deuxième degré. On veut reconnaître si la surface S est de révolution et, en cas d'affirmative, trouver son axe de révolution. On peut y arriver en appliquant le théorème suivant, qui découle de ce fait que, lorsque S a une infinité de plans de symétrie passant par une même droite, les deux surfaces α et α', qui possèdent toutes les symétries de S, doivent être aussi de révolution autour de cette droite.

THÉORÈME. — *Quand les deux surfaces α et α' ne sont pas deux sphères concentriques :*

1° *Si elles sont toutes les deux de révolution, autour*

([1]) Les plans de coordonnées par rapport auxquels les équations des surfaces des troisième et quatrième ordres à plans de symétrie prennent les formes réduites données dans les deux Tableaux précédents sont les plans de symétrie eux-mêmes, ou des plans perpendiculaires à leurs droites d'intersection, ou des bissecteurs d'angles formés par ces plans de symétrie.

d'une seule et même droite, ou autour d'une infinité de mêmes droites parallèles entre elles, la surface S *peut être de révolution, mais seulement autour de cette droite ou d'une parallèle à ces droites.*

2° *Dans tous les autres cas, la surface* S *n'est pas de révolution.*

Quand les deux surfaces α *et* α' *sont deux sphères concentriques :*

1° *Si la surface* S *est du troisième ou du cinquième ordre, elle n'est pas de révolution* (1);

2° *Si la surface* S *est du quatrième ordre, pour qu'elle soit de révolution, il faut et il suffit que le cône des directions asymptotiques de* S *soit une sphère double, et que, en appelant* x_0, y_0, z_0 *les coordonnées du centre commun des deux sphères* α *et* α', *et* M *le coefficient de* x^4 *dans* $f(x, y, z)$, *la surface correspondant à l'équation*

$$f(x,y,z) - \mathrm{M}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^2 = 0,$$

qui est au plus du troisième degré, soit de révolution autour d'une droite passant par le point (x_0, y_0, z_0), *et l'axe de révolution de cette dernière surface est le même que celui de* S (2).

Comme il est toujours facile de vérifier, par une transformation de coordonnées bien évidente, si une surface algébrique définie analytiquement est de révolution

(1) Quand une surface du cinquième ordre est de révolution, on peut vérifier, en prenant son axe de révolution pour un des axes de coordonnees, que la surface α n'est jamais d'ordre inférieur à 3 si la quadrique α' est une sphère.

(2) On regardera une surface indéterminée ou rejetée à l'infini comme une surface de révolution autour d'une droite quelconque de l'espace, ou encore comme une sphère concentrique à toute sphère de l'espace.

autour d'une droite parallèle à une direction *connue*, et de déterminer cette droite, on voit que le cas d'une surface du troisième ordre sera complètement résolu par le théorème qui précède, et que le cas d'une surface du quatrième ou du cinquième ordre, s'il n'est directement résolu par ce théorème, se trouvera ramené au cas d'une surface du troisième ordre. En définitive, la question est résolue dans les trois cas.