

G. FONTENÉ

**Sur un cas remarquable de la  
projection gauche**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1896), p. 369-372

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1896\\_3\\_15\\_\\_369\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__369_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[P6f]

**SUR UN CAS REWARQUABLE DE LA PROJECTION GAUCHE;**

PAR M. G. FONTENÉ,  
Professeur au collège Rollin.

---

1. On connaît ce théorème, donné par la notion du point autohomologue, de deux figures semblables en Géométrie plane :

*Étant données, dans un plan, deux figures semblables F et F', avec même sens de rotation, si l'on partage dans un même rapport les droites AA', BB', CC', ... qui joignent deux points correspondants, les points de partage A'', B'', C'', ... déterminent une figure F'' semblable aux deux premières.*

On en déduit immédiatement cet autre théorème, dont la première idée appartient à l'un de mes anciens élèves, Jean Siegler :

*Étant données, dans deux plans parallèles P et P',*

deux figures semblables  $F$  et  $F'$ , avec même sens de rotation, les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,... qui joignent deux points correspondants rencontrent un plan  $P''$  parallèle aux deux premiers en des points  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,... qui déterminent une figure  $F''$  semblable aux deux premières.

On ramène ce théorème au premier en projetant obliquement les figures  $F'$  et  $F''$  sur le plan  $P$  : la direction des projetantes étant  $AA'$  par exemple, le point  $A$  est le point autohomologue pour la figure plane obtenue.

2. On peut disposer des deux paramètres du point courant  $M$  de la figure  $F$  pour faire que la droite  $MM'M''$  soit perpendiculaire au plan  $P$ , et je le désigne alors par  $OO'O''$  : si l'on projette orthogonalement les figures  $F'$  et  $F''$  sur le plan  $P$ , le point  $O$  est le point autohomologue pour la figure plane obtenue. On peut démontrer le théorème en employant la propriété bien connue du quadrilatère gauche, et en faisant une rotation autour de  $OO'O''$  ; on prend sur  $OB$  et sur  $O'B'$  les longueurs  $O\alpha$ ,  $O'\alpha'$  respectivement égales aux longueurs  $OA$ ,  $O'A'$ , on mène  $\alpha\alpha'$ ...

3. La correspondance entre les points courants  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  est déterminée dès que l'on connaît les deux segments homologues  $AB$  et  $A'B'$ , ou encore les deux droites  $AA'$  et  $BB'$ . Avec des coordonnées polaires, les pôles étant  $A$  et  $A'$ , les axes polaires étant  $Ax$  et  $A'x'$  dirigées suivant  $AB$  et  $A'B'$ , et en posant  $k' = \frac{A'B'}{AB}$ , on peut dire : à tout point  $M$  du plan  $P$ , de coordonnées  $\theta$  et  $r$ , répond un point  $M'$  du plan  $P'$ , de coordonnées  $\theta$  et  $k'r$  ; en remplaçant  $A'x'$  par  $A'\xi'$  parallèle à  $Ax$ , les

coordonnées de  $M'$  sont  $\alpha' + \theta$  et  $k'r$ . Ce point de vue conduit à une démonstration analytique du théorème :

*On prend A pour origine, AA'  $\Lambda''$  pour axe des z, et, dans le plan P, des axes rectangulaires dont l'un Ax est suivant AB; on trouve que, par rapport au pôle A'' et à l'axe polaire A''  $\xi''$  parallèle à Ax, les coordonnées de M'' sont  $\alpha'' + \theta$  et  $k''r$ ,  $\alpha''$  et  $k''$  étant des constantes; on a par exemple*

$$\text{tang } \alpha'' = \frac{\alpha'' k' \sin \alpha'}{\alpha'' k' \cos \alpha' + (\alpha' - \alpha'')},$$

$\alpha'$  et  $\alpha''$  étant les z des points A' et A''.

4. Relativement aux droites  $MM'$  ou  $\mu$ , qui forment une congruence, on a ce théorème :

*Les droites  $\mu$  sont les droites qui rencontrent deux droites fixes  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; celles-ci sont les parallèles au plan P qui s'appuient sur AA', sur BB', et sur le cercle de l'infini, ou encore les droites qui, partant des points cycliques du plan P, rencontrent AA' et BB'.*

On le démontre facilement en cherchant par la Géométrie analytique une droite  $z = h$ ,  $y = mx$ , qui rencontre la droite  $MM'$  quels que soient  $r$  et  $\theta$ ; on trouve

$$m = \pm i, \quad 1 - \frac{\alpha'}{h} = k'(\cos \alpha' \pm i \sin \alpha').$$

En appelant  $h_1$  et  $h_2$  les deux valeurs de  $h$  qui sont imaginaires conjuguées, on a la formule

$$k'^2 = \left(1 - \frac{\alpha'}{h_1}\right) \left(1 - \frac{\alpha'}{h_2}\right),$$

qui donne  $k'$  en fonction de  $\alpha'$  supposé variable, et l'on

a ensuite  $\alpha'$  par les formules

$$\cos \alpha' + i \sin \alpha' = \left( 1 - \frac{\alpha'}{h_1} \right) : k',$$

$$\cos \alpha' - i \sin \alpha' = \left( 1 - \frac{\alpha'}{h_2} \right) : k';$$

si le point A de la droite AA'A'' est choisi tel que l'on ait  $h_1 + h_2 = 0$ , on a simplement

$$\tan \alpha' = \frac{ia'}{h_1}, \quad k' = \frac{1}{\cos \alpha'}.$$

Parmi les droites  $\mu$  qui rencontrent les deux droites fixes  $\Delta$  et  $\Delta'$ , on doit remarquer la perpendiculaire commune OO'.

On voit que la correspondance entre les points homologues M et M' des deux plans P et P' est en somme établie par une projection gauche; on appelle ainsi (STEINER, ABEL, TRANSON, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865, p. 385, et 1866, p. 63, 213) un mode de projection dans lequel les projetantes sont assujetties à rencontrer deux droites fixes  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; ces droites fixes sont ici deux isotropes, le plan P de la figure à projeter et le tableau P' sont deux plans parallèles à ces isotropes, et il arrive alors que la figure projetée et la projection sont deux figures semblables.