R. BRICARD

Sur une question de géométrie relative aux polyèdres

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 331-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__331_1>

[K14d]

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE RELATIVE AUX POLYÈDRES;

PAR M. R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

La mesure de la surface du triangle s'établit, en Géométrie plane, à l'aide de considérations très simple. Il n'en est pas de même pour la question analogue de la Géométrie de l'espace, relative au volume du tétraèdre. On sait en effet que l'on démontre l'équivalence de deux tétraèdres ayant même hauteur et des bases de même surface, en les décomposant en tranches parallèles infiniment minces, équivalentes deux à deux. Cette démonstration ressortit en réalité au Calcul infinitésimal.

On peut se demander si cette décomposition est nécessaire et s'il serait possible de montrer l'équivalence des deux tétraèdres en question par une voie plus élémentaire, ce qui serait intéressant au point de vue de la doctrine. L'étude de cette dernière question, que nous avons entreprise sur le conseil de notre ami M. Hoffbauer, lieutenant d'Artillerie, mène à cette conclusion qu'il faut se prononcer pour la négative.

Posons-nous le problème général suivant :

Étant donnés deux polyèdres équivalents, peut-on toujours décomposer l'un d'eux en un nombre fini *de polyèdres, qui, assemblés d'une manière différente, reconstituent le second polyèdre?*

Soit P un polyèdre quelconque, et p_1, p_2, p_3, ... les polyèdres en lesquels on le décompose par un certain nombre de plans arbitrairement tracés.

Les polyèdres p, assemblés différemment, constituent un nouveau polyèdre P'.

Dans le premier mode d'assemblage, ceux des dièdres des polyèdres p qui ont une arête commune ont pour somme un dièdre de P, ou π ou 2π. Dans le deuxième mode, la même somme a pour valeur un dièdre de P', π ou 2π.

En partant de cette remarque, on arrivera facilement à établir la congruence

$$mA + nB + \ldots + m'A' - n'B' + \ldots \equiv 0 \qquad (\bmod \pi),$$

A, B, ..., A', B', ... désignant les dièdres des polyèdres P et P', et m, n, ..., m', n', ... des entiers qui ne sont pas tous nuls. Cette conclusion subsiste si, parmi les polyèdres p, quelques-uns sont extérieurs aux polyèdres P et P', de manière que ces derniers soient égaux à leur somme algébrique.

Ainsi, pour que deux polyèdres soient susceptibles d'être transformés l'un en l'autre par une décomposition de chacun en un nombre fini de polyèdres, superposables deux à deux, il faut qu'une certaine fonction linéaire de leurs dièdres, à coefficients entiers, soit un multiple de deux angles droits.

Or l'équivalence de deux polyèdres n'entraîne en aucune façon une relation de ce genre. Le fait est à peu près évident; on peut s'en convaincre, si l'on veut, par l'examen d'un cube et d'un tétraèdre régulier équivalents [1].

La transformation en question sera donc impossible dans le cas général. Il en résulte que l'on ne peut établir l'équivalence de deux tétraèdres ayant même base et même hauteur, et ne satisfaisant pas à d'autre condition particulière, sans avoir recours à la décomposition en éléments infiniment petits.

Le problème analogue relatif à deux polygones équivalents est au contraire toujours possible. C'est un fait connu et dont la démonstration est aisée. Dans ce cas, le succès tient à ce que les sommes des angles de deux polygones diffèrent toujours d'un multiple de deux angles droits.

Pour les polyèdres, la relation que nous avons trouvée est nécessaire, mais elle n'est sans doute pas suffisante. Ce serait un problème intéressant, mais difficile, que de rechercher les conditions précises permettant la transformation qui nous occupe, et le moyen de réaliser cette transformation dans les cas où elle est possible.

Nous terminerons en montrant qu'elle peut se faire dans le cas de deux tétraèdres symétriques et par consé-

---

[1] Le dièdre du tétraèdre régulier, dont le cosinus est égal à $\frac{1}{3}$, est en effet incommensurable avec π. S'il en était autrement, il existerait une équation binome ayant une racine égale à $\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{8}}{3}$, et dont le premier membre admettrait comme facteur le polynome $3x^2 - 2x + 3$, ce qui est impossible.

quent dans celui de deux polyèdres symétriques, que l'on peut décomposer en tétraèdres symétriques deux à deux.

Soient ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres symétriques. Décomposons le premier en 12 tétraèdres, au moyen de droites joignant le centre de la sphère circonscrite aux sommets et aux centres des cercles circonscrits aux faces. Effectuons la même décomposition sur le tétraèdre A'B'C'D'. Deux éléments correspondants de ABCD et A'B'C'D' sont superposables en même temps que symétriques, car ils possèdent un plan de symétrie.