NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-M. LÉMERAY

Sur la dérivée des fonctions interpolées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 325-327

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__325_1>

[C1a] [H12aα]

SUR LA DÉRIVÉE DES FONCTIONS INTERPOLÉES;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

Considérons une fonction définie par les valeurs qu'elle prend pour une infinité de valeurs de la variable différant entre elles d'une unité. Je supposerai la fonction développable, dans tout le plan, par la série de Taylor. Soit x une des valeurs de la variable pour lesquelles on connaît celle de la fonction, et proposons-nous d'obtenir la valeur de la dérivée correspondante. Désignons par f_p la valeur de la fonction quand la variable a pour valeur $x+p$, p pouvant être positif ou négatif. On a en général

$$f_p = f_0 + p\frac{f'_0}{1} + p^2\frac{f''_0}{1.2} + \ldots,$$

$$f_{-p} = f_0 - p\frac{f'_0}{1} + p^2\frac{f''_0}{1.2} - \ldots.$$

Si l'on pose

$$\frac{f_p - f_{-p}}{2p} = K_p, \qquad \frac{f_0^n}{n!} = A_n$$

et

$$f'_0 = K_0,$$

on obtient, en donnant à p la suite des valeurs 1, 2, 3, ..., les équations suivantes

$$K_1 = K_0 + A_3 + A_5 + \ldots,$$
$$K_2 = K_0 + 2^2 A_3 + 2^4 A_5 + \ldots,$$
$$K_3 = K_0 + 3^2 A_3 + 3^4 A_5 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si nous voulons avoir une valeur approchée de K_0, nous considérerons les m premières équations et nous y supposerons nulles les quantités A_i d'indices égaux ou supérieurs à $2m+1$; en éliminant entre ces m équations $A_3, A_5, \ldots, A_{2m-1}$ il restera

$$K_0 = \frac{\begin{vmatrix} K_1 & 1 & \ldots & 1 \\ K_2 & 2^2 & \ldots & 2^{2m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ K_m & m^2 & \ldots & m^{2m-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2^2 & \ldots & 2^{2m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 1 & m^2 & \ldots & m^{2m-2} \end{vmatrix}}.$$

Si l'on développe le numérateur par rapport à la première colonne, le coefficient de K_r sera le déterminant mineur obtenu en supprimant dans le dénominateur la première colonne et la $r^{\text{ième}}$ ligne. Soit $\Delta_{m-1,r}$ ce déterminant mineur. D'après une propriété que j'ai signalée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (mars 1896), on a

$$\frac{\Delta_{m-1,r}}{\Delta_{m-1,m}} = C_{2m}^{m-r}.$$

Il s'ensuit que l'on aura entre $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_m$ une relation telle que le coefficient de K_0 étant proportionnel au coefficient central du développement du binome de puissance $2m$, ceux de $K_1, K_2, \ldots, K_m$ seront proportionnels aux doubles coefficients successifs, et que cette relation pourra être représentée symboliquement par l'équation

$$(K-1)^{2m} = 0,$$

où, après développement, il faudra :

1° Remplacer chaque exposant par sa différence avec m en valeur absolue;

2° Remplacer les exposants par des indices.

La valeur de la dérivée est ainsi fournie par l'équation symbolique

$$\lim(K - 1)^{2m} = 0,$$

pour m infini.

On pourra se servir de cette méthode pour les fonctions définies par la relation qui existe entre deux valeurs de la fonction correspondant à deux valeurs de la variable différant d'une unité.

On ramènerait aisément à ce cas celui où la raison de la progression arithmétique des valeurs de x serait autre que l'unité.

La formule proposée n'a pas d'intérêt pour les fonctions, dont on connaît une expression analytique de la dérivée; mais elle pourra être utile dans le cas contraire qui se présentera souvent quand la fonction sera définie de la manière à laquelle il est fait allusion plus haut.