Nouvelles annales de mathématiques

F. Dumont

Théorème sur la détermination d'une surface du troisième ordre générale par sa hessienne

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 312-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__312_1>

[$M^2 3f$]

THÉORÈME SUR LA DÉTERMINATION D'UNE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE GÉNÉRALE PAR SA HESSIENNE;

PAR M. F. DUMONT [1],

Professeur au lycée d'Annecy.

C'est un théorème bien connu qu'une courbe plane du troisième ordre donnée est la courbe hessienne de trois cubiques du même plan.

La hessienne d'une surface cubique est du quatrième ordre, elle n'est pas générale de son degré puisqu'elle possède 10 points doubles, sommets d'un pentaèdre. La question analogue à se poser pour l'espace à 3 dimensions est donc la suivante : Une surface du quatrième ordre à 10 points doubles, sommets d'un pentaèdre étant donnée, peut-elle être la hessienne d'une surface ou de plusieurs surfaces du troisième ordre?

La réponse est fournie par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une surface du troisième ordre est*

---

(1) L'auteur de cette Note profite de l'occasion qui se présente à lui pour reconnaître que les théorèmes relatifs aux polygones tracés sur les surfaces du troisième ordre, théorèmes qu'il a donné dans une théorie élémentaire de ces surfaces, ont déjà été publiés en 1883 par M. Rudolf Sturm, dans un petit Mémoire paru dans les *Mathematische Annalen,* lequel ne lui a été communiqué que récemment.

déterminée sans ambiguïté quand on donne une surface du quatrième ordre à 10 points doubles, sommets d'un pentaèdre pour sa hessienne.

Soit la surface

$$A_{111}x^3 + A_{222}y^3 + \ldots + 3A_{112}x^2y + \ldots + 6A_{234}yzt = 0$$

(les indices 1, 2, 3, 4 se rapportent respectivement à x, y, z et t).

L'équation de la quadrique polaire de x_1, y_1, z_1, t_1, est

$$\begin{aligned}
&x_1[A_{111}x^2 + A_{122}y^2 + \ldots + 2A_{112}xy + \ldots + 2A_{134}zt]\\
+&y_1[A_{211}x^2 + A_{222}y^2 + \ldots + 2A_{212}xy + \ldots + 2A_{234}zt]\\
+&z_1[A_{311}x^2 + A_{322}y^2 + \ldots + 2A_{312}xy + \ldots + 2A_{334}zt]\\
+&t_1[A_{411}x^2 + A_{422}y^2 + \ldots + 2A_{412}xy + \ldots + 2A_{434}zt] = 0,
\end{aligned}$$

où l'on suppose $A_{ijk} = A_{ikj} = A_{kij} = \ldots$.

L'équation du plan polaire de x_1, y_1, z_1, t_1 s'obtient en permutant dans la précédente les coordonnées courantes x, y, z, t et celles du point x_1, y_1, z_1, t_1.

On sait que chaque point double A de la hessienne a pour quadrique polaire un système de 2 plans ayant pour axe celle des 10 arêtes du pentaèdre qui n'est dans aucune des 3 faces du pentaèdre passant par A et formant, avec les deux faces du pentaèdre qui passent par cette arête, un faisceau harmonique.

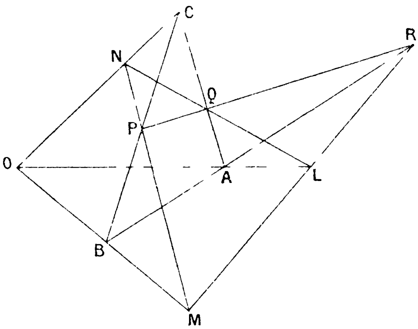
Par suite le plan polaire de A, qui est aussi le plan plan polaire par rapport à cette quadrique dégénérée, passe par cette même arête.

Cherchons la forme que prendra l'équation de la surface, si les 4 sommets du tétraèdre de référence, ainsi que les 6 intersections de ses arêtes avec le plan

$$V \equiv l_1x + l_2y + l_3z + l_4t = 0,$$

sont les 10 points de la hessienne, c'est-à-dire les 10 points satisfaisant à la condition que leur plan polaire passe par l'arête qui leur est opposée dans le pentaèdre ($X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$, $V = 0$).

Supposons que O, A, B, C, L, M, N, P, Q, R dé-



signent respectivement les sommets

$$X = Y = Z = 0, \qquad Y = Z = T = 0,$$
$$X = Z = T = 0, \qquad X = Y = T = 0,$$
$$Y = Z = V = 0, \qquad X = Z = V = 0, \qquad X = Y = V = 0,$$
$$X = T = V = 0, \qquad Y = T = V = 0, \qquad Z = T = V = 0.$$

Nous avons :

Conditions pour que le plan polaire : 1° De O passe par PQR :

$$\frac{A_{144}}{l_1} = \frac{A_{244}}{l_2} = \frac{A_{344}}{l_3};$$

2° De A passe par MPN :

$$\frac{A_{211}}{l_2} = \frac{A_{311}}{l_3} = \frac{A_{411}}{l_4};$$

3° De B passe par LQN :

$$\frac{A_{322}}{l_3} = \frac{A_{422}}{l_4} = \frac{A_{122}}{l_1};$$

4° De C passe par MLR :

$$\frac{A_{433}}{l_4} = \frac{A_{133}}{l_1} = \frac{A_{233}}{l_2};$$

5° De L passe par BPC :

$$A_{211}\,l_4^2 + A_{244}\,l_1^2 - 2A_{124}\,l_1\,l_4 = 0,$$
$$A_{311}\,l_4^2 + A_{344}\,l_1^2 - 2A_{134}\,l_1\,l_4 = 0;$$

6° De M passe par CQA :

$$A_{122}\,l_4^2 + A_{144}\,l_2^2 - 2A_{124}\,l_2\,l_4 = 0,$$
$$A_{322}\,l_4^2 + A_{344}\,l_2^2 - 2A_{234}\,l_2\,l_4 = 0;$$

7° De N passe par BAR :

$$A_{233}\,l_4^2 + A_{244}\,l_3^2 - 2A_{234}\,l_3\,l_4 = 0,$$
$$A_{133}\,l_4^2 + A_{144}\,l_3^2 - 2A_{134}\,l_3\,l_4 = 0;$$

8° De P passe par OAL :

$$A_{122}\,l_3^2 + A_{133}\,l_2^2 - 2A_{123}\,l_2\,l_3 = 0,$$
$$A_{422}\,l_3^2 + A_{433}\,l_2^2 - 2A_{234}\,l_2\,l_3 = 0;$$

9° De Q passe par OBM :

$$A_{211}\,l_3^2 + A_{233}\,l_1^2 - 2A_{123}\,l_1\,l_3 = 0,$$
$$A_{411}\,l_3^2 + A_{433}\,l_1^2 - 2A_{134}\,l_1\,l_3 = 0;$$

10° De R passe par ONC :

$$A_{311}\,l_2^2 + A_{322}\,l_1^2 - 2A_{123}\,l_1\,l_2 = 0,$$
$$A_{411}\,l_2^2 + A_{422}\,l_1^2 - 2A_{124}\,l_1\,l_2 = 0.$$

On déduit aisément de ce Tableau, le suivant

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{122} = \dfrac{l_2}{l_3}A_{123}, & A_{211} = \dfrac{l_1}{l_3}A_{123}, & A_{322} = \dfrac{l^2}{l_1}A_{123}, \\ A_{133} = \dfrac{l_3}{l_2}A_{123}, & A_{311} = \dfrac{l_1}{l_2}A_{123}, & A_{233} = \dfrac{l_3}{l_1}A_{123}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{122} = \dfrac{l_2}{l_4} A_{124}, & A_{211} = \dfrac{l_1}{l_4} A_{124}, & A_{422} = \dfrac{l_2}{l_1} A_{124}, \\ A_{144} = \dfrac{l_4}{l_2} A_{124}, & A_{411} = \dfrac{l_1}{l_2} A_{124}, & A_{244} = \dfrac{l_4}{l_1} A_{124}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{144} = \dfrac{l_4}{l_3} A_{134}, & A_{411} = \dfrac{l_1}{l_3} A_{134}, & A_{344} = \dfrac{l_4}{l_1} A_{134}, \\ A_{133} = \dfrac{l_3}{l_4} A_{134}, & A_{311} = \dfrac{l_1}{l_4} A_{134}, & A_{433} = \dfrac{l_3}{l_1} A_{134}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{422} = \dfrac{l_2}{l_3} A_{234}, & A_{244} = \dfrac{l_4}{l_3} A_{234}, & A_{322} = \dfrac{l_2}{l_4} A_{234}, \\ A_{433} = \dfrac{l_3}{l_2} A_{234}, & A_{344} = \dfrac{l_4}{l_2} A_{234}, & A_{233} = \dfrac{l_3}{l_4} A_{234}. \end{array}\right.$$

En égalant les deux valeurs de A_{122} de ce Tableau puis les deux de A_{133}, les deux de A_{233}, on a les conditions

$$A_{234}\, l_1 = A_{341}\, l_2 = A_{412}\, l_3 = A_{123}\, l_4.$$

Soit λ la valeur commune des quatre membres.

En transportant les valeurs

$$A_{234} = \frac{\lambda}{l_1}, \qquad A_{341} = \frac{\lambda}{l_2}, \qquad A_{412} = \frac{\lambda}{l_3}, \qquad A_{123} = \frac{\lambda}{l_4}$$

dans les équations précédentes, on déduit

$$\begin{array}{lll} A_{122} = \dfrac{l_2}{l_3 l_4}\lambda, & A_{133} = \dfrac{l_3}{l_2 l_4}\lambda, & A_{144} = \dfrac{l_4}{l_2 l_3}\lambda, \\ A_{233} = \dfrac{l_3}{l_4 l_1}\lambda, & A_{244} = \dfrac{l_4}{l_1 l_3}\lambda, & A_{211} = \dfrac{l_1}{l_3 l_4}\lambda. \\ A_{344} = \dfrac{l_4}{l_1 l_2}\lambda, & A_{311} = \dfrac{l_1}{l_2 l_4}\lambda, & A_{322} = \dfrac{l_2}{l_4 l_1}\lambda, \\ A_{411} = \dfrac{l_1}{l_2 l_3}\lambda. & A_{422} = \dfrac{l_2}{l_3 l_1}\lambda. & A_{433} = \dfrac{l_3}{l_1 l_2}\lambda. \end{array}$$

Posons, pour éviter les dénominateurs, $\lambda = l_1 l_2 l_3 l_4 \mu$. l'équation générale de la surface devient

$$\begin{aligned} &A_{111} x^3 + A_{222} y^3 + A_{333} z^3 + A_{444} t^3 \\ &\quad + \mu[3 l_1^2 l_2 x^2 y + 3 l_1^2 l_3 x^2 z + \ldots + 6 l_1 l_2 l_3 xyz + \ldots]. \end{aligned}$$

Or, en posant $A_{iii} = \alpha_i + l_i^3 \mu$, elle prend la forme

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 y^3 + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 t^3 + \mu(l_1 x + l_2 y + l_3 z + l_4 t)^3 = 0.$$

La hessienne de cette surface est, si

$$v \equiv l_1 x + l_2 y + l_3 z + l_4 t$$

$$\frac{1}{\mu} xyzt + \frac{l_1^2}{\alpha_1} yztv + \frac{l_2^2}{\alpha_2} xztv + \frac{l_3^2}{\alpha_3} xytv + \frac{l_4^2}{\alpha_4} xyzv = 0.$$

L'équation d'une surface du quatrième ordre, ayant 10 points doubles en O, A, B, C, L, M, N, P, Q, R, est de la forme

$$A xyzt + B yztv + C xztv + D xytv + E xyzv = 0.$$

Si l'on identifie les deux équations, on a les conditions

$$\alpha_1 = \frac{l_1^2 A}{B} \mu, \qquad \alpha_2 = \frac{l_2^2 A}{C} \mu, \qquad \alpha_3 = \frac{l_3^2 A}{D} \mu, \qquad \alpha_4 = \frac{l_4^2 A}{E} \mu,$$

qui montrent que A, B, C, D, E étant donnés, on a pour les rapports de 4 des quantités α_1, α_2, α_3, α_4, μ à la cinquième des valeurs déterminées, ce qui démontre le théorème.

Il est bon de remarquer que la donnée des 10 points doubles de la hessienne, seule, n'équivaut qu'à 15 conditions simples car les rapports $\frac{\alpha_1}{\mu}$, $\frac{\alpha_2}{\mu}$, $\frac{\alpha_3}{\mu}$, $\frac{\alpha_4}{\mu}$ restent alors indéterminés. Si l'on donnait 10 points quelconques avec la condition que leurs plans polaires passent respectivement par 10 droites quelconques, on obtiendrait un système de $10 \times 2 = 20$ équations linéaires par rapport aux coefficients de l'équation de la surface générale du troisième ordre, c'est-à-dire que l'on aurait une équation de trop en général.