NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS RAFFY

Une leçon sur la méthode de quadrature de Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 249-262

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__249_0>

[C2j]

UNE LEÇON SUR LA MÉTHODE DE QUADRATURE DE GAUSS;

PAR M. LOUIS RAFFY,
Maître de Conférences à l'École Normale supérieure.

Le programme de l'agrégation des Sciences mathématiques pour 1896 porte comme épreuve pratique le calcul d'une intégrale par la méthode de Gauss. Il renvoie les candidats à un Ouvrage épuisé depuis bien des années et où, d'ailleurs, la question de l'approximation obtenue n'est pas posée. Pour ces raisons nous croyons utile de publier la présente Leçon.

1. Ayant à intégrer une fonction $F(x)$ entre deux limites *données* α et β, on remplace cette fonction par un polynome entier $G(x)$, de degré $n-1$, qui pour n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, comprises entre α et β, acquière les mêmes valeurs que $F(x)$, et l'on prend pour valeur de l'intégrale proposée l'intégrale du polynome $G(x)$. Tel est le principe des quadratures par interpolation (Newton, Cotes, Gauss).

On sait que le polynome $G(x)$ est unique et a pour expression

$$(1) \qquad G(x) = \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r(x)\, F(x_r),$$

si l'on pose

$$(2) \qquad \gamma_r(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_1)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)}.$$

Les polynomes γ_r ne dépendent que des nombres x_r et nullement de la fonction $F(x)$. Leurs intégrales

$$(3) \qquad g_r = \int_\alpha^\beta \gamma_r(x)\, dx$$

ne dépendront donc absolument que de ces mêmes nombres x_r, de α et de β, et l'on aura pour l'intégrale cherchée

$$(4)\qquad \int_\alpha^\beta G(x)\,dx = g_1 F(x_1) + \ldots + g_r F(x_r) + \ldots + g_n F(x_n).$$

Il suffit que les intégrales g_r soient calculées une fois pour toutes.

2. Pour nous faire une idée de ce que Gauss appelle *le degré de précision* de la méthode précédente, supposons que la fonction à intégrer $F(x)$ soit développable entre α et β par la formule de Mac-Laurin,

$$(5)\qquad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots.$$

Le polynome $G(x)$ pourra être écrit

$$(6)\qquad G(x) = \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r(x)(a_0 + a_1 x_r + a_2 x_r^2 + \ldots + a_m x_r^m + \ldots).$$

Réunissons tous les termes en a_0, tous les termes en a_1, et ainsi de suite, ce qui donnera

$$(6)'\qquad G(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \ldots + a_m \varphi_m(x) + \ldots;$$

enfin formons la différence

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx - \int_\alpha^\beta G(x)\,dx.$$

Nous pourrons l'écrire

$$(7)\qquad \int_\alpha^\beta [F(x) - G(x)]\,dx = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_m \int_\alpha^\beta [x^m - \varphi_m(x)]\,dx.$$

Cette expression de l'erreur donne lieu à une remarque importante :

Quels que soient les nombres x_1, x_2, ... x_n, la sé-

rie (7) *ne contient aucun coefficient a d'indice moindre que n*; ou encore : *Les deux intégrales*

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx, \qquad \int_\alpha^\beta G(x)\,dx,$$

ordonnées suivant les coefficients a_r, ont leurs n premiers termes communs.

Voici comment on peut s'en assurer sans calcul. Les polynomes $\gamma_r(x)$ étant indépendants de la fonction $F(x)$, les polynomes $\varphi_m(x)$ n'en dépendent pas non plus. Nous les déterminerons donc en attribuant à $F(x)$ une forme particulière, celle d'un polynome entier de degré $n-1$,

$$(5)' \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Dans ce cas $G(x)$, qui prend les mêmes valeurs que $F(x)$ pour n valeurs de x, lui est identique, quels que soient les coefficients a_r, et l'on a

$$\varphi_m(x) \equiv x^m$$

pour les valeurs $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ce qui prouve bien que la série (7) commence par un terme en a_n. Si donc nous appelons *degré de précision* de la méthode l'indice du premier coefficient de $F(x)$ qui figure dans l'expression, nous dirons : *Les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant quelconques, le degré de précision de la méthode de quadrature par interpolation est égal à n.*

3. Théorème. — *Par un choix convenable des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le même d'ailleurs quelle que soit la fonction à intégrer, on peut porter au double le degré de précision de la méthode.*

Cette proposition, due à Gauss, revient à ceci : *On peut choisir les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de telle façon* *que dans la série (7) les intégrales qui multiplient les coefficients $a_n, \ldots, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}$ soient nulles.*

Pour établir ce résultat et retrouver en même temps le précédent, considérons le polynome

$$(8) \qquad \varphi_m(x) = \gamma_1(x)x_1^m + \gamma_2(x)x_2^m + \ldots + \gamma_m(x)x_n^m.$$

C'est évidemment, d'après la formule générale (1), le polynome de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui prend les mêmes valeurs que x^m pour n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En conséquence pour les valeurs $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, il est identique à x^m, ce qui prouve le théorème du n° 2.

Pour $m \geqq n$, en faisant la division de x^m par le produit

$$(9) \qquad \xi_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

on trouve

$$x^m = \xi_n(x)Q_{m-n}(x) + \varphi_m(x),$$

car le reste est un polynome de degré inférieur ou égal à $n-1$, qui prend les mêmes valeurs que x^m pour les n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et qui, par suite, n'est autre que $\varphi_m(x)$. On a donc identiquement

$$(10) \qquad x^m - \varphi_m(x) = \xi_n(x)Q_{m-n}(x),$$

le polynome Q étant d'un degré marqué par son indice.

Exprimons maintenant l'énoncé. On veut que les n intégrales

$$(11) \qquad \int_\alpha^\beta [x^m - \varphi_m(x)]\,dx \qquad (m = n, n+1, \ldots, 2n-1)$$

soient nulles, ou, ce qui revient au même, en vertu de la formule (10), que l'intégrale

$$(12) \qquad \int_\alpha^\beta \xi_n(x)(a_n Q_0 + a_{n+1}Q_1 + \ldots + a_{2n-1}Q_{n-1})\,dx$$

soit nulle, quelles que soient les constantes $a_n, \ldots, a_{2n-1}$. Or il est aisé de voir qu'on peut déterminer *successivement* $a_{2n-1}, a_{2n-2}, \ldots, a_{n+1}, a_n$ de manière que le polynome

$$a_{2n-1}Q_{n-1} + a_{2n-2}Q_{n-2} + \ldots + a_{n+1}Q_1 + a_n Q_0,$$

dont les composants Q sont chacun du degré marqué par leur indice, soit identique à un polynome *arbitraire* du degré $n-1$. Il *faut* donc et il *suffit* que l'on ait

$$\int_\alpha^\beta \xi_n(x)\,V(x)\,dx = 0, \tag{13}$$

en désignant par $V(x)$ un polynome *arbitraire, du degré* $n-1$. S'il existe un polynome $\xi_n(x)$ de degré n, admettant n racines comprises entre α et β, et satisfaisant à cette condition, il est évident qu'il n'y aura qu'à prendre pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de ce polynome; on annulera ainsi les n intégrales (11), et cela *quelle que soit la fonction à intégrer* $F(x)$, puisque ces intégrales n'en dépendent pas.

Je dis qu'on peut prendre pour $\xi_n(x)$ le polynome

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-\alpha)^n(x-\beta)^n. \tag{14}$$

En effet, ce polynome est évidemment d'ordre n; d'après le théorème de Rolle, il admet n racines comprises entre α et β. Car si l'on pose pour abréger

$$\psi(x) = (x-\alpha)^n(x-\beta)^n,$$

on voit immédiatement que la dérivée $\psi'(x)$ admet $n-1$ fois les racines α et β, et de plus une racine comprise entre α et β. En appliquant encore le théorème de Rolle on reconnaît que toute dérivée $\psi^{(p)}(x) (p \leqq n)$ admet les deux racines α et β avec l'ordre de multiplicité $n-p$ et, en outre, p racines comprises entre α et β.

Pour établir la dernière propriété, rappelons une formule que donne l'intégration par parties,

$$\int V(x)\psi^{(n)}(x)\,dx = V\psi^{(n-1)} - V'\psi^{(n-2)} + V''\psi^{(n-3)} + \ldots$$
$$+ (-1)^n \int V^{(n)}(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Si l'on intègre entre α et β, les n premiers termes du second membre disparaissent, puisque les $n-1$ premières dérivées de ψ s'annulent pour α et β; le dernier s'évanouit également, puisque la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $V(x)$ se réduit à zéro. L'équation (13) est donc bien vérifiée par le polynome (14).

Il est d'ailleurs aisé de montrer que tout polynome $\zeta(x)$ de même degré que $\xi_n(x)$ et jouissant de la propriété qu'exprime l'équation (13) ne peut différer de $\xi_n(x)$ que par un facteur constant. En effet, si l'on a simultanément

$$\int_\alpha^\beta \xi_n(x)\,V(x)\,dx = 0, \qquad \int_\alpha^\beta \zeta(x)\,V(x)\,dx = 0,$$

on en conclura

$$(15) \qquad \int_\alpha^\beta [\zeta_n(x) - k\zeta(x)]\,V(x)\,dx = 0,$$

quelle que soit la constante k. Or on peut choisir cette constante de telle sorte que le polynome $\xi_n - k\zeta$ s'abaisse au degré $n-1$. Cela étant, comme la relation précédente est supposée avoir lieu quel que soit le polynome $V(x)$ de degré $n-1$, on pourra prendre pour $V(x)$ précisément $\xi_n - k\zeta$, ce qui réduira l'identité (15) à

$$\int_\alpha^\beta V^2(x)\,dx = 0;$$

par suite V est identiquement nul, ce qui prouve la proposition.

4. *Résumé; mode d'application.* — Pour appliquer la méthode de Gauss, il faut :

1° Connaître les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'équation

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-\alpha)^n(x-\beta)^n = 0;$$

2° Connaître les coefficients g_r définis au n° 1, savoir

$$(3) \qquad g_r = \int_\alpha^\beta \gamma_r(x)\,dx \qquad (r = 1, 2, \ldots, n);$$

3° Calculer l'intégrale cherchée en effectuant la somme

$$(4) \qquad g_1 \mathrm{F}(x_1) + g_2 \mathrm{F}(x_2) + \ldots + g_n \mathrm{F}(x_n),$$

au moyen des valeurs que prend pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la fonction à intégrer $\mathrm{F}(x)$.

Il convient d'ailleurs de remarquer que, une fois connus les nombres x_1, x_2, ..., x_n, les intégrales g_1, $g_2, \ldots, g_n$ peuvent être calculées par la résolution de n équations du premier degré. En effet, en vertu de la formule (8), on a identiquement

$$(8)' \qquad x^m = \gamma_1(x)\,x_1^m + \gamma_2(x)\,x_2^m + \ldots + \gamma_n(x)\,x_n^m,$$

pour $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. On déduit de là par intégration

$$\frac{\beta^{m+1} - \alpha^{m+1}}{m+1} = g_1 x_1^m + g_2 x_2^m + \ldots + g_n x_n^m,$$

et donnant à m les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, on a n équations du premier degré propres à déterminer les n inconnues $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Il est avantageux de ramener les limites α et β de l'intégrale à être deux nombres fixes. On peut choisir, comme l'a fait Gauss, les nombres 0 et 1. A cet effet, dans l'intégrale proposée

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{F}(t)\, dt,$$

on opère le changement de variable

$$t = \alpha + (\beta - \alpha) x.$$

Alors l'équation $\xi_n(x) = 0$, dont les racines sont prises pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, devient

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n (x-1)^n = 0.$$

Gauss a calculé avec seize décimales les racines de sept équations de cette forme ($n = 1, 2, \ldots, 7$) et les valeurs correspondantes des coefficients g_r.

On peut aussi ramener les limites de l'intégrale proposée

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{F}(t)\, dt$$

à être -1 et $+1$. Il suffit de poser

$$t = \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} x.$$

Alors le polynome $\xi_n(x)$, dont les racines sont prises pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n'est autre que

$$\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

C'est, à un facteur constant près, le polynome X_n de Legendre.

5. *Limite de l'erreur.* — Nous allons maintenant traiter, d'après M. Markoff, dont nous simplifierons l'analyse, une question importante, entièrement négligée par Gauss : *Trouver une limite supérieure de l'er-*

reur commise quand on applique la méthode précédente. Établissons d'abord un résultat dont nous aurons à faire usage.

Théorème. — *Si une fonction* $F(x)$ *et un polynome* $\Phi(x)$ *de degré* $2n-1$ *prennent les mêmes valeurs ainsi que leurs dérivées* $F'(x)$ *et* $\Phi'(x)$ *pour* n *valeurs* x_1, $x_2, \ldots, x_n$ *de la variable, et si l'on pose*

$$(16)\quad F(x)-\Phi(x)=[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\,P(x),$$

on aura

$$(17)\qquad P(x)=\frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ *étant compris entre le plus grand et le plus petit des nombres* x, x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Pour le prouver, je dis que *si une fonction* $f(x)$ *et sa dérivée s'annulent pour* $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, *on a*

$$(18)\quad f(x)=[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\,\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ *étant compris entre le plus grand et le plus petit des nombres* x, x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

En effet, il est visible que la fonction

$$f(z)-\left[\frac{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}\right]^2 f(x)$$

admet la racine simple $z=x$ et les n racines doubles

$$z=x_1,\ \ldots,\ x_n.$$

En appliquant à ses dérivées successives le théorème de Rolle, on reconnaît que celle d'ordre $2n$ s'annule pour un nombre ξ, compris entre la plus grande et la plus petite de ces $n+1$ valeurs : d'où résulte l'équation qu'il s'agissait d'établir.

La proposition annoncée est par là-même établie, car il suffit, dans l'équation (18), de remplacer $f(x)$ par $F(x) - \Phi(x)$ et de remarquer que la dérivée d'ordre $2n$ de $\Phi(x)$ est identiquement nulle pour trouver

$$F(x) - \Phi(x) = [(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)]^2 \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

d'où, par comparaison avec la formule (16),

$$P(x) = \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

6. Cela posé, convenons que les nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ soient les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée d'ordre n du polynome

(19) $$\psi(x) = (x^2 - 1)^n.$$

L'erreur ε commise en appliquant la méthode de Gauss avec ces valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$$

a évidemment pour expression

(20) $$\varepsilon = \int_{-1}^{+1} [F(x) - G(x)]\,dx.$$

Pour l'évaluer, substituons au polynome $G(x)$ un polynome $\Phi(x)$ de degré $2n-1$

(21) $$\Phi(x) = G(x) + \psi^{(n)}(x)\,\theta_{n-1}(x)$$

qui prend évidemment les mêmes valeurs que $G(x)$ et, par suite, que $F(x)$ pour les racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $\psi^{(n)}(x)$; il en sera ainsi quel que soit le polynome θ_{n-1} de degré $n-1$. Mais nous pouvons supposer ce polynome déterminé de telle manière que la dérivée de $\Phi(x)$ prenne les mêmes valeurs que celle de $F(x)$ pour ces mêmes nombres. Car, désignant l'un d'eux par x_r, on a

$$\Phi'(x_r) = F'(x_r) = G'(x_r) + \psi^{(n+1)}(x_r)\,\theta_{n-1}(x_r),$$

ce qui détermine le polynome θ_{n-1} par les valeurs qu'il acquiert pour les n valeurs considérées de x.

Le polynome $\Phi(x)$ que nous venons de définir peut être substitué à $G(x)$ dans l'évaluation de l'erreur ε, car on a visiblement

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} G(x)\,dx + \int_{-1}^{+1} \psi^{(n)}(x)\,\theta_{n-1}(x)\,dx.$$

Or, dans cette identité, la seconde intégrale du second membre est nulle, d'après la propriété caractéristique des polynomes de Legendre.

7. Nous sommes ainsi ramenés à évaluer l'intégrale

$$(22) \qquad \varepsilon = \int_{-1}^{+1} [F(x) \quad \Phi(x)]\,dx.$$

Mais, à raison des deux propriétés que nous avons données au polynome $\Phi(x)$, le théorème du n° 5 lui est applicable et l'on a

$$(16)' \quad F(x) - \Phi(x) = [(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)]^2 \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ étant un nombre évidemment variable avec x, mais compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et, par suite, compris entre -1 et $+1$ quand x varie entre ces limites. Par suite l'intégrale

$$(22)' \quad \varepsilon = \frac{1}{(2n)!}\int_{-1}^{+1} [(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\, F^{(2n)}(\xi)\,dx,$$

dont l'élément différentiel se compose de deux facteurs, dont l'un est essentiellement positif, pourra être écrite

$$(23) \quad \varepsilon = \frac{\mu}{(2n)!}\int_{-1}^{+1} [(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)]^2\,dx.$$

μ désignant un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs que la fonction $F^{(2n)}(\xi)$ acquiert quand x varie entre -1 et $+1$. Mais comme ξ est une fonction de x dont la valeur est elle-même comprise dans ces conditions entre -1 et $+1$, on voit que μ est un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend la dérivée $F^{(2n)}(x)$ quand x varie de -1 à $+1$. On peut donc le représenter par $F^{(2n)}(\xi_0)$, ξ_0 étant un certain nombre compris entre -1 et $+1$, ce qui donne

$$(24)\qquad \varepsilon = \frac{F^{2n}(\xi_0)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1}[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\,dx.$$

L'intégrale qui figure au second membre est facile à calculer. En effet, le polynome X_n de Legendre ayant pour définition

$$X_n = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont ses racines, on aura

$$X_n = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!\,2^n}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

d'où l'on tire

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = \frac{n!\,2^n X_n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}.$$

En conséquence,

$$\int_{-1}^{+1}[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\,dx$$
$$= \frac{n!\,n!\,2^{2n}}{[2n(2n-1)\ldots(n+1)]^2}\int_{-1}^{+1}X_n^2\,dx.$$

Or on connaît la formule

$$\int_{-1}^{+1}X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1};$$

on a donc cette expression finale de l'erreur,

$$\varepsilon = \frac{n!\,2^{2n+1}}{[2n(2n-1)\ldots(n+1)]^3}\,\frac{F^{(2n)}(\xi_0)}{2n+1}, \tag{25}$$

où ξ_0, on l'a vu, est compris entre -1 et $+1$.

Si l'on peut trouver la plus grande valeur absolue M de la dérivée $F^{(2n)}(x)$ entre -1 et $+1$, il suffira évidemment de substituer M à $F^{(2n)}(\xi_0)$ dans la formule précédente (25) pour avoir une limite supérieure de l'erreur ε que l'on commet en employant un polynome $G(x)$ d'un degré donné $n-1$, sans d'ailleurs en connaître le sens.

8. Mais si l'on assigne *a priori* l'approximation exigée, on n'a pas ainsi le moyen de déterminer d'avance le degré $n-1$ du polynome à employer. Rien ne prouve, en outre, que l'erreur diminue quand n augmente. Ajoutons que la méthode de Gauss exige de longs calculs pour la détermination approchée des racines x_r d'équations algébriques de degré élevé, pour la substitution de ces nombres, qui sont compliqués, dans la fonction à intégrer, enfin pour la détermination des intégrales auxiliaires g_r. Elle présente donc, avec un certain intérêt théorique, de graves défectuosités dans l'application.

Elle n'est d'un emploi commode que quand la fonction à intégrer $F(x)$ est une fraction rationnelle. On peut alors, se donnant n et par suite le polynome ξ_n, déterminer *algébriquement*, sans aucun calcul d'approximation, le polynome $G(x)$, du degré $n-1$, qui prend les mêmes valeurs que $F(x)$ pour les n racines x_r de l'équation $\xi_n = 0$. L'intégration de ce polynome fournira *exactement* la valeur approchée de l'intégrale. Mais l'évaluation de l'erreur sera toujours très laborieuse.

Exemple. — Soit à calculer l'intégrale

$$\pi = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1},$$

au moyen de quatre valeurs intermédiaires de x. Ici, n étant égal à 4, le polynome ξ_n est, à un facteur constant près, la dérivée quatrième de $(x^2-1)^4$, savoir

$$\xi_4 = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{35}.$$

L'identité algébrique

$$35\xi_4 - 68 = 5(x^2+1)(7x^2-13)$$

montre que l'on aura, pour les quatre racines de ξ_4,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{5}{68}(13 - 7x^2).$$

On prendra donc pour valeur approchée de π

$$\frac{5}{34}\int_{-1}^{+1}(13 - 7x^2)\,dx = \frac{5.32}{3.34} = \frac{80}{51} = 3{,}137.$$

Comme on connaît la valeur de π on voit que l'erreur est 0,004; mais si l'on voulait en déterminer une limite supérieure en appliquant la formule (25), on serait conduit à des calculs fort longs.