NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON AUTONNE

Sur une différentielle exacte

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 232-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__232_1>

[C1a] SUR UNE DIFFÉRENTIELLE EXACTE;

Par M. Léon AUTONNE,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon.

Les candidats à la Licence usent rarement des ressources qu'offrent, dans beaucoup de cas, les coordonnées homogènes dans l'espace. Cela m'engage à insérer l'exercice ci-dessous, lequel n'a, d'ailleurs, aucune prétention à la haute science.

Connaissant la position d'un point dans l'espace, on possède, non ses quatre coordonnées homogènes

$$x_j (j = 1, 2, 3, 4),$$

mais seulement leurs rapports. Pour fixer les valeurs absolues, on pose

$$(o) \qquad e = \sum_j e_j x_j = 1, \qquad e_j = \text{const. arbitr.}$$

Alors les points du plan e, $e = 0$, ont leurs coordonnées infinies. Ce plan joue le rôle du plan de l'infini avec les coordonnées ordinaires. Conservons au plan e son nom de *plan de l'infini;* les droites de e sont les *droites à l'infini.* Chaque plan possède une droite à l'infini.

Seulement alors une même expression

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

s'écrit d'une infinité de façons différentes, car les coefficients de F peuvent être considérés comme des fonctions arbitraires de la quantité e, laquelle est l'unité en vertu de (0). On doit donc, en toute généralité, écrire pour la dérivée partielle

$$(1)\qquad \frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial e} c_j, \qquad \frac{\partial F}{\partial e} = \text{quelconque}.$$

Voici maintenant le problème :

Sur la surface algébrique S

$$(2)\qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

f forme quaternaire, indécomposable, on envisage l'expression différentielle

$$dU = \sum A_j\, dx_j,$$

A_j = fraction rationnelle homogène en x_j, de degré m.

En vertu des relations (0) et (2) les quatre variables x_j se réduisent à deux distinctes u et v, que l'on n'a pas besoin de spécifier plus exactement; u et v seront, par exemple, si l'on veut, deux combinaisons linéaires homogènes, à coefficients constants, des x_j.

Exprimons que dU est la différentielle exacte d'une fonction U de u et v.

Posons j ou $k = 1, 2, 3, 4$

$$A_{jk} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k}; \qquad P_{jk} = -P_{kj} = A_{jk} - A_{kj}, \qquad p_j = \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

$$u_j = \frac{\partial x_j}{\partial u}; \qquad v_j = \frac{\partial x_j}{\partial v}; \qquad [jk] = u_j v_k - u_k v_j$$

$$(jk) = e_j p_k - e_k p_j.$$

Il viendra

$$dU = du \sum_j A_j u_j + dv \sum_j A_j v_j$$

La condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial}{\partial v} \sum_j A_j u_j = \sum_j A_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial v \partial u} + \sum_j \sum_k A_{jk} u_j v_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \sum_j A_j v_j = \sum_j A_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial u \partial v} + \sum_j \sum_k A_{jk} u_k v_j,$$

c'est-à-dire

$$\sum_j \sum_k P_{jk} [jk] = 0$$

Les $[jk]$ sont les six coordonnées homogènes de la droite qui joint les deux points de coordonnées u_j et v_j respectivement. Or

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u} = \sum_j p_j u_j = \frac{\partial e}{\partial u} = \sum_j e_j u_j,$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial v} = \sum_j p_j v_j = \frac{\partial e}{\partial v} = \sum_j e_j v_j$$

La droite est la droite à l'infini du plan tangent à la surface S et l'on a

$$\frac{[12]}{(34)} = \frac{[34]}{(12)} = \frac{[23]}{(14)} = \frac{[14]}{(23)} = \frac{[31]}{(24)} = \frac{[24]}{(31)}.$$

La condition d'intégrabilité est donc que l'expression

$$\mathfrak{D} = P_{12}(34) + P_{34}(12) + P_{23}(14) + P_{14}(23) + P_{31}(24) + P_{24}(31)$$

soit divisible par f.

Exprimons que la condition ne change pas par l'effet de la formule (1), c'est-à-dire quand on remplace

$$p_j \text{ par } p_j + e_j \frac{\partial f}{\partial e}, \qquad A_{jk} \text{ par } A_{jk} + \frac{\partial A_j}{\partial e} e_k.$$

Les (jk) ne changent pas; les P_{kj} s'augmentent du terme

$$[jk]' = e_k \frac{\partial A_j}{\partial e} - e_j \frac{\partial A_k}{\partial e};$$

$\mathfrak{D}$ s'augmente de l'expression

$$(12)[34]' - (23)[14]' + (31)[24]' - [12]'(34) + [23]'(14) + [31]'(24),$$

laquelle est identique au déterminant

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e}\, e p e\right),$$

c'est-à-dire nulle.

$\mathfrak{D}$ est donc un invariant vis-à-vis de la formule (1).

La condition s'interprète géométriquement. Les P_{jk} sont les six coefficients d'un complexe linéaire $\mathfrak{C}$. La condition est celle-ci : *la droite à l'infini du plan tangent à la surface* S *est située sur le complexe* $\mathfrak{C}$.

Pour revenir aux coordonnées ordinaires, posons

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = 1; \; A_1 = A, A_2 = B, A_3 = C;$$

il viendra, puisque $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, $e_4 = 1$,

$$dU = A\,dx + B\,dy + C\,dz.$$

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial y},$$

ce qui se vérifie directement sans peine.

On sait que M. Em. Picard a étudié d'une façon très approfondie l'expression

$$\int A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

intégrale de différentielle exacte, sur une surface algébrique.