NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

W. DE TANNENBERG

Équations du mouvement d'un point matériel sur une surface quand on tient compte du frottement

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 201-207

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__201_0>

[R7aβ]

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE QUAND ON TIENT COMPTE DU FROTTEMENT;

PAR M. W. DE TANNENBERG.

Je me propose d'indiquer une méthode élémentaire, permettant de trouver sous une forme simple les équations du mouvement d'un point matériel sur une surface, quand on tient compte du frottement.

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Soient

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v)$$

les équations de la surface donnée S. Nous supposerons qu'on ait choisi les variables u et v de manière que les lignes coordonnées de la surface soient rectangulaires. Dans ces conditions

$$(2) \qquad \mathrm{F} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Nous désignerons par MU la direction de la tangente à la ligne coordonnée (U)

$$v = \text{const.}$$

qui passe par le point $\mathrm{M}(u, v)$; de même MV désignera la direction de la tangente à la ligne coordonnée (V)

$$u = \text{const.}$$

passant par le même point M. Suivant l'usage, MU correspondra aux (u) croissants et MV aux (v) croissants.

Soient

$$u = \alpha(t), \qquad v = \beta(t) \tag{3}$$

les équations d'un arc de courbe (C) passant par M; nous prendrons pour sens positif de cet arc, dans le voisinage du point M, celui dans lequel se meut M quand t va en croissant. Soit alors MT la direction de la tangente; nous poserons

$$\omega = \widehat{\mathrm{MU}, \mathrm{MT}}.$$

Si (s) désigne l'abscisse curviligne du point M sur la courbe C, on sait que

$$\left\{\begin{aligned} ds \cos\omega &= +\sqrt{\mathrm{E}}\,du, \\ ds \sin\omega &= +\sqrt{\mathrm{G}}\,dv, \\ ds^2 &= \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

E, G ayant la signification habituelle.

Enfin nous prendrons, pour direction positive de la normale à la surface, la direction MW, telle que le trièdre MU, MV, MW ait la disposition directe.

2. Considérons le mouvement du trièdre (MU, MV, MW), quand le point M décrit la courbe C suivant la loi définie par les équations (3), et proposons-nous de trouver la projection sur la normale MW du segment de la rotation instantanée.

Les cosinus directeurs des droites MU, MV sont respectivement

$$(\mathrm{MU}) \qquad a_1 = \frac{1}{\mathrm{A}} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad b_1 = \frac{1}{\mathrm{A}} \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad c_1 = \frac{1}{\mathrm{A}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

où $\mathrm{A} = +\sqrt{\mathrm{E}}$:

$$(\mathrm{MV}) \qquad a_2 = \frac{1}{\mathrm{C}} \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad b_2 = \frac{1}{\mathrm{C}} \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad c_2 = \frac{1}{\mathrm{C}} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

où $\mathrm{C} = +\sqrt{\mathrm{G}}$.

La composante cherchée (r) est donnée par

$$r = a_2 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{db_1}{dt} + c_2 \frac{dc_1}{dt}.$$

Si l'on développe $\frac{da_1}{dt}$, on trouve

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} u' + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} v'\right) - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mathrm{A}}\right).$$

$\frac{db_1}{dt}$, $\frac{dc_1}{dt}$ ont des expressions analogues. Donc, en tenant compte de la condition (2)

$$r = \frac{1}{\mathrm{AC}}\left(u' \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + v' \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right),$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{1}{\mathrm{AC}}\left(-\mathrm{A}u' \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + \mathrm{C}v' \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}\right) \text{ (1)}.$$

Les formules (3) permettent d'écrire

$$r = \frac{\rho}{\mathrm{AC}}\left(-\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} \cos \omega + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} \sin \omega\right).$$

3. Enfin cherchons la projection de l'accélération du point M sur la normale à la surface. Cette projection a évidemment pour expression (a, b, c désignant les cosinus directeurs de MW)

$$\Gamma_n = a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Mais

$$a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} = 0,$$

donc

$$\Gamma_n = -\frac{da\,dx + db\,dy + dc\,dz}{dt^2}.$$

---

(1) Voir la *Théorie des Surfaces* de M. DARBOUX (2e Partie, p. 385).

Or, si au numérateur on remplace x, y, z, a, b, c par leurs valeurs en fonction de (u, v), on trouve une forme quadratique en du et dv, que l'on rencontre souvent en Géométrie :

$$da\,dx + db\,dy + dc\,dz = -(\mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'du\,dv + \mathrm{G}'dv^2).$$

Par suite

$$\Gamma_n = \frac{\mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'du\,dv + \mathrm{G}'dv^2}{dt^2}.$$

II. — Équations du mouvement.

Supposons qu'un point matériel M, soumis à une force donnée F, se meuve avec frottement sur la surface S, et écrivons les équations du mouvement pendant un intervalle de temps

$$t_1 < t < t_2.$$

où la vitesse ne s'annule pas. Nous supposerons la demi-normale MW dirigée du côté où le point peut quitter la surface; on peut évidemment réaliser cette condition, tout en conservant la disposition directe au trièdre MU, MV, MW (en permutant au besoin u et v). Alors la réaction normale N de la surface reste positive pendant le mouvement du point sur la surface. Pour direction positive de la trajectoire, nous prendrons le sens de ce mouvement; de sorte que

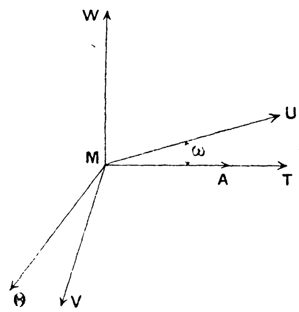
$$\rho = \frac{ds}{dt} > 0,$$

et la force de frottement a pour expression $(-f\mathrm{N})$. Enfin la masse du point sera supposée égale à l'unité.

Ceci posé, écrivons que la force d'inertie fait équilibre à la force active F et à la réaction R de la surface. Soit MΘ la demi-normale à la trajectoire, située dans le plan tangent et définie par

$$\widehat{MT, M\Theta} = +\frac{\pi}{2}.$$

Projetons toutes les forces sur MT, MΘ, MW. Il



suffit d'exprimer que sur chaque axe la somme des projections est nulle.

Les projections de F et de la réaction R sont respectivement

$$\begin{array}{ccc} F_u \cos\omega + F_v \sin\omega, & -F_u \sin\omega + F_v \cos\omega, & F_n. \\ -fN, & 0, & N. \end{array}$$

Les projections de la force d'inertie suivant MT et MW sont respectivement

$$-\frac{d\rho}{dt}, \qquad -\frac{E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2}{dt^2}.$$

Reste à calculer la projection sur MΘ. Soit MA le segment représentant la vitesse à l'instant t. L'accélération du point M est la dérivée géométrique du segment MA, prise par rapport à t, ou bien la vitesse relative du point A par rapport au système (Mx, My, Mz), parallèle au système fixe (Ox_1, Oy_1, Oz_1). Cette vitesse est la résultante de deux autres : 1° de la vitesse relative de A par rapport au système MU, MV, MW; 2° de la vitesse par rapport à Mx, My, Mz du point du plan UMV, qui coïncide avec A, à l'époque t. Les projections de ces deux vitesses suivant MΘ sont évidemment $\left(\rho\,\frac{d\omega}{dt}\right)$ et (ρr). Donc la projection de la force d'inertie suivant MΘ est

$$-\rho\left(\frac{d\omega}{dt}+r\right)=-\rho\,\frac{d\omega}{dt}-\frac{\rho^2}{\mathrm{AC}}\left(-\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}\cos\omega+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}\sin\omega\right).$$

Les équations du mouvement sont donc

$$\text{(I)}\qquad \frac{d\rho}{dt}=\mathrm{F}_u\cos\omega+\mathrm{F}_v\sin\omega-f\mathrm{N}.$$

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{aligned}&\rho\,\frac{d\omega}{dt}-\frac{\rho^2}{\mathrm{AC}}\left(-\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}\cos\omega+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}\sin\omega\right)\\&=-\mathrm{F}_u\sin\omega+\mathrm{F}_v\cos\omega.\end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)}\qquad \frac{\mathrm{E}'\,du^2+2\mathrm{F}'\,du\,dv+\mathrm{G}'\,dv^2}{dt^2}=\Gamma_n+\mathrm{N}.$$

$$\text{(IV)}\qquad \mathrm{A}\,\frac{du}{dt}=\rho\cos\omega$$

$$\text{(V)}\qquad \mathrm{C}\,\frac{dv}{dt}=\rho\sin\omega.$$

L'équation III permet d'exprimer N en fonction de ρ, ω, u, v. Les équations I, II, IV et V forment alors un système de quatre équations différentielles du premier ordre par rapport aux quatre fonctions inconnues ρ, ω, u, v.

On pourrait établir l'équation II en utilisant une formule du *Cours de Géométrie* relative à la courbure géodésique; j'ai pensé que la méthode précédente était plus élémentaire et même plus simple.

On peut appliquer ces équations au problème traité par M. de Saint-Germain (*Bulletin des Sciences mathé-*

matiques, 1892). Dans ce cas la surface est le cylindre

$$x = \mathrm{R}\cos v, \qquad y = \mathrm{R}\sin v, \qquad z = u.$$

La normale à la surface, dirigée vers l'axe, a pour cosinus directeurs

$$a = -\cos v, \qquad b = -\sin v, \qquad c = 0;$$

par suite

$$\Sigma\, da\, dx = -\mathrm{R}\, dv^2,$$

d'où

$$\mathrm{E}' = 0, \qquad \mathrm{F}' = 0, \qquad \mathrm{G}' = \mathrm{R}.$$

D'autre part

$$\mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{R}.$$

On retrouve les équations auxquelles M. de Saint-Germain a été conduit par un procédé tout différent.