Nouvelles annales de mathématiques

H. Andoyer

Sur l'intersection de deux quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 153-173

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__153_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[L²17a] SUR L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES [1];

PAR M. H. ANDOYER.

1. Soit

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

l'équation ponctuelle d'une quadrique quelconque S rapportée à un tétraèdre de référence quelconque $A_1A_2A_3A_4$.

La quadrique S est une *quadrique proprement dite* si les quatre équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

n'ont pas de solutions communes non toutes nulles, c'est-à-dire encore si le discriminant F de f n'est pas nul. Alors la quadrique S n'a aucun point singulier; tout point de l'espace a un plan polaire et un seul ; un point est situé dans son plan polaire s'il est sur S, et son plan polaire est alors le plan tangent à S en ce point; ce plan tangent coupe la surface suivant deux droites distinctes.

La quadrique S est un *cône* si les quatre équations $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ont un système de solutions non toutes nulles,

[1] L'exposition suivante des résultats bien connus relatifs à l'intersection de deux quadriques est celle que je donne dans mes conférences aux candidats à l'agrégation; elle me paraît simple et complète. Il est d'ailleurs à peine utile de dire qu'elle ne présente rien d'essentiellement nouveau.

c'est-à-dire encore si le discriminant F est nul, sans que tous ses mineurs du premier ordre le soient. Une telle surface a un point singulier et un seul, le sommet A du cône. Tout point de l'espace autre que A a un plan polaire et un seul passant par A ; il est contenu dans son plan polaire s'il est sur S, et son plan polaire est alors le plan tangent à S en ce point ; ce plan tangent coupe la surface suivant deux droites confondues. Le plan polaire de A est absolument indéterminé.

La quadrique S est un système de deux plans distincts, ou simplement un *dièdre,* si les quatre équations $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ont une infinité simple de systèmes de solutions communes non toutes nulles, c'est-à-dire encore si le discriminant F et tous ses mineurs du premier ordre sont nuls, sans que tous ses minenrs du second ordre le soient. Une telle surface a une infinité simple de points singuliers remplissant la droite D, arête du dièdre. Tout point de l'espace non situé sur D a un plan polaire et un seul passant par D ; il est situé dans son plan polaire s'il est sur S, et son plan polaire est alors un des plans du dièdre S. Le plan polaire d'un point de D est absolument indéterminé.

La quadrique S est un *plan double* si les quatre équations $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ont une infinité double de systèmes de solutions communes non toutes nulles, c'est-à-dire encore si le discriminant F ainsi que tous ses mineurs du premier et du second ordre sont nuls. Une telle surface a une infinité double de points singuliers, remplissant le plan P qui, compté deux fois, constitue la surface S. Tout point de l'espace non situé dans P a pour plan polaire le plan P ; le plan polaire d'un point de P est absolument indéterminé.

2. Soit

$$g = b_{11}x_1^2 + \ldots + 2b_{34}x_3x_4 = 0,$$

l'équation d'une seconde quadrique T, *distincte de* S; nous supposons, en outre, que *les deux quadriques* S *et* T *n'ont pas de points singuliers communs ;* l'étude du système de deux quadriques ayant un point singulier commun ne diffère pas, en effet, de l'étude du système de deux coniques.

Les deux quadriques S et T se coupent suivant une courbe du quatrième ordre C, ou *quartique,* car l'hypothèse faite montre que les deux quadriques, si elles se décomposent toutes deux en systèmes de plans, n'ont pas de plan commun.

Les deux quadriques S et T déterminent un *faisceau* Φ de quadriques U, représentées par l'équation

$$\lambda f + \mu g = 0,$$

λ et μ étant deux paramètres toujours finis, non nuls en même temps.

Deux quadriques U sont distinctes si elles correspondent à deux systèmes distincts (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), de valeurs de λ et μ, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0;$$

deux telles quadriques peuvent évidemment remplacer les quadriques S et T pour définir le faisceau Φ, et, par suite, nous pourrons toujours choisir, à notre gré, les quadriques fondamentales S et T parmi celles du faisceau.

Toutes les quadriques U du faisceau, en nombre simplement infini, contiennent la courbe C ; par un point de l'espace non situé sur C passe une quadrique U et une seule.

Enfin, remarquons que tout ce que nous avons déjà dit, comme tout ce qui suivra, ne dépend évidemment en rien du choix des coordonnées, et que, par suite, le tétraèdre de référence pourra toujours être pris à notre gré.

3. Le faisceau Φ contient des quadriques *singulières*, c'est-à-dire douées de points singuliers. Ces quadriques correspondent aux valeurs de λ et μ qui annulent le discriminant Δ de la forme $\lambda f + \mu g$. Les points singuliers d'une telle quadrique sont donnés par la résolution des quatre équations

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0.$$

Une quadrique singulière est un cône, si les valeurs de λ et μ auxquelles elle correspond n'annulent pas tous les mineurs du premier ordre de Δ ; elle est un dièdre si ces valeurs annulent tous les mineurs du premier ordre de Δ, mais non tous les mineurs du second ordre ; elle est un plan double, si ces valeurs annulent tous les mineurs du second ordre de Δ.

Appelons *points singuliers* du faisceau Φ les points singuliers des surfaces singulières du faisceau. On voit tout de suite que tout point singulier du faisceau jouit de la propriété d'avoir même plan polaire par rapport à toutes les quadriques U du faisceau ; et réciproquement, tout point jouissant de cette propriété est un point singulier du faisceau. En effet, les points jouissant de cette propriété sont fournis par les équations

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{\frac{\partial g}{\partial x_3}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_4}}{\frac{\partial g}{\partial x_4}},$$

qui sont équivalentes à celles trouvées plus haut pour déterminer les points singuliers du faisceau.

Deux points singuliers appartenant à deux surfaces singulières différentes, c'est-à-dire correspondant à deux systèmes distincts (λ_1, μ_1) (λ_2, μ_2) de valeurs de λ et μ annulant Δ, sont conjugués par rapport à toutes les surfaces du faisceau.

En effet, si (x_i) et (y_i) sont les coordonnées de ces deux points, on a les relations

$$\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \qquad \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu_2 \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda_1 \sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_1 \sum y_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0,$$

$$\lambda_2 \sum x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu_2 \sum x_i \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0,$$

et, puisque l'on a $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$,

$$\sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \qquad \sum y_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum x_i \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0,$$

et enfin, λ, μ étant quelconques,

$$\lambda \sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \sum y_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

En résumé, nous voyons que, si un point A est singulier, il est singulier pour une seule surface singulière; par rapport à toutes les surfaces autres que celle-ci, il a un même plan polaire, qui contient tous les points singuliers des autres surfaces singulières.

4. Le discriminant Δ n'est pas en général nul identiquement; alors l'équation $\Delta = 0$, où l'on peut considérer le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ comme l'inconnue, admet quatre ra-

cines distinctes ou confondues, et, par suite, le faisceau Φ contient au plus quatre surfaces singulières, et au moins une. En outre, il est évident que si une racine de $\Delta = o$ correspond à un plan double, c'est-à-dire annule tous les mineurs du second ordre de Δ, cette racine est d'un ordre de multiplicité au moins égal à trois; de même, une racine qui correspond à un dièdre, c'est-à-dire qui annule tous les mineurs du premier ordre de Δ, mais non tous les mineurs du second ordre, est d'un ordre de multiplicité au moins égal à deux.

Mais le discriminant Δ peut aussi être nul identiquement; étudions d'abord complètement ce cas exceptionnel.

Les quadriques U sont toutes singulières; mais, parmi elles, une au plus peut être un système de plans. En effet, si deux d'entre elles étaient des systèmes de plans, on aurait, en les choisissant pour S et T,

$$f = X_1 X_2, \qquad g = X_3 X_4,$$

les X_i étant des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées, et l'équation du faisceau serait

$$\lambda X_1 X_2 + \mu X_3 X_4 = o.$$

Or il est impossible que les quatre fonctions X_i soient indépendantes, car, dans ce cas, en prenant pour nouveaux plans de coordonnées les plans $X_i = o$, on voit tout de suite que Δ ne serait pas nul identiquement; mais il est impossible aussi que les fonctions X_i ne soient pas indépendantes, car, dans ce cas, S et T auraient un point singulier commun. L'hypothèse faite est donc absurde.

Supposons donc que S et T soient deux cônes; en choisissant convenablement les coordonnées, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
f &= a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 \\
&\qquad + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4, \\
g &= b_{11}x_1^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 \\
&\qquad + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{14}x_1x_4 + 2b_{34}x_3x_4,
\end{aligned}
$$

de sorte que les sommets de S et T sont respectivement A_1 et A_2.

On a alors

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
b_{11}\mu & 0 & b_{13}\mu & b_{14}\mu \\
0 & a_{22}\lambda & a_{23}\lambda & a_{24}\lambda \\
b_{13}\mu & a_{23}\lambda & a_{33}\lambda + b_{33}\mu & a_{34}\lambda + b_{34}\mu \\
b_{14}\mu & a_{24}\lambda & a_{34}\lambda + b_{34}\mu & a_{44}\lambda + b_{44}\mu
\end{vmatrix};
$$

les discriminants des formes à trois variables f et g n'étant pas nuls, l'évanouissement identique de Δ est exprimé par les conditions

$$
a_{22} = 0, \qquad b_{11} = 0, \qquad b_{13}a_{24} - b_{14}a_{23} = 0.
$$

Ces conditions expriment que chacun des cônes S et T passe par le sommet de l'autre, et que ces deux cônes ont même plan tangent le long de la génératrice commune A_1A_2. En prenant pour ce plan tangent le plan $A_1A_2A_3$ d'équation $x_4 = 0$, on a

$$
a_{23} = 0, \qquad b_{13} = 0,
$$

et puisque S et T sont de véritables cônes, les coefficients a_{33}, b_{33}, a_{24}, b_{14} sont différents de zéro.

En égalant à zéro tous les mineurs de Δ, on voit que le faisceau Φ contient un système de plans et un seul; c'est un dièdre qui correspond à

$$
a_{33}\lambda + b_{33}\mu = 0;
$$

ce dièdre se compose du plan $A_1A_2A_3$ et d'un autre plan ne passant ni par A_1 ni par A_2.

Donc, finalement, le faisceau Φ se compose de cônes tangents le long d'une génératrice commune à un même plan, et d'un dièdre formé par ce plan et un autre qui coupe la génératrice commune. Par suite, la courbe C se compose de cette génératrice commune comptée deux fois et d'une conique qui la rencontre en un point.

5. Le cas exceptionnel où le discriminant Δ est identiquement nul étant laissé de côté, examinons maintenant ce que l'on peut dire sur chaque surface singulière du faisceau et ses points singuliers.

1° Supposons qu'une surface singulière du faisceau soit un cône; prenons ce cône pour la quadrique T, de sorte que la racine correspondante de $\Delta = 0$ sera

$$\lambda = 0.$$

En prenant pour A_1 le sommet du cône T, on a

$$g = b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 \\ + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{24}x_2x_4 + 2b_{34}x_3x_4,$$

et, par suite,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda & a_{13}\lambda & a_{14}\lambda \\ a_{12}\lambda & a_{22}\lambda + b_{22}\mu & a_{23}\lambda + b_{23}\mu & a_{24}\lambda + b_{24}\mu \\ a_{13}\lambda & a_{23}\lambda + b_{23}\mu & a_{33}\lambda + b_{33}\mu & a_{34}\lambda + b_{34}\mu \\ a_{14}\lambda & a_{24}\lambda + b_{24}\mu & a_{34}\lambda + b_{34}\mu & a_{44}\lambda + b_{44}\mu \end{vmatrix}.$$

Si la racine $\lambda = 0$ est simple pour l'équation $\Delta = 0$, on a

$$a_{11} \neq 0;$$

ceci veut dire que le point A_1, sommet du cône T, n'est sur aucune autre surface du faisceau.

Si la racine $\lambda = 0$ est multiple pour l'équation $\Delta = 0$, on a

$$a_{11} = 0,$$

puisque le discriminant de la forme g à trois variables n'est pas nul. Donc le point A est commun à toutes les

les surfaces U du faisceau, et comme il a même plan polaire par rapport à toutes ces surfaces, celles-ci sont toutes tangentes au même plan en A; si le faisceau a un dièdre comme autre surface singulière, l'un des plans de ce dièdre est le plan tangent commun en A à toutes les surfaces U.

Soit $A_1A_2A_3$ ce plan tangent commun en A_1 à toutes les surfaces U; on a alors

$$a_{12} = a_{13} = 0,$$

et a_{14} n'est certainement pas nul.

On a aussi

$$\Delta = -a_{14}^2\lambda^2 \begin{vmatrix} a_{22}\lambda + b_{22}\mu & a_{23}\lambda + b_{23}\mu \\ a_{23}\lambda + b_{23}\mu & a_{33}\lambda + b_{33}\mu \end{vmatrix}.$$

La racine $\lambda = 0$ n'est d'un ordre de multiplicité supérieur à deux que si l'on a

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0,$$

c'est-à-dire si le plan $A_1A_2A_3$ est tangent au cône T; alors elle est au moins triple.

La racine $\lambda = 0$ est quadruple si l'on a en outre

$$a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23} = 0,$$

c'est-à-dire si les droites d'intersection de S avec le plan $A_1A_2A_3$ sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites d'intersection de T avec le même plan : comme celles-ci sont supposées actuellement confondues avec la génératrice de contact du cône T avec le plan $A_1A_2A_3$, il faut que cette génératrice de contact appartienne à toutes les surfaces U du faisceau.

2° Supposons qu'une surface singulière soit un dièdre que nous prendrons pour la quadrique T, de sorte que la racine correspondante de $\Delta = 0$ sera

$$\lambda = 0.$$

En prenant $A_1 A_2$ pour arête du dièdre T, on a

$$g = b_{33} x_3^2 + 2 b_{34} x_3 x_4 + b_{44} x_4^2,$$

et par suite

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda & a_{13}\lambda & a_{14}\lambda \\ a_{12}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23}\lambda & a_{24}\lambda \\ a_{13}\lambda & a_{23}\lambda & a_{33}\lambda + b_{33}\mu & a_{34}\lambda + b_{34}\mu \\ a_{14}\lambda & a_{24}\lambda & a_{34}\lambda + b_{34}\mu & a_{44}\lambda + b_{44}\mu \end{vmatrix}.$$

Si la racine $\lambda = 0$ n'est que double pour l'équation $\Delta = 0$, et par suite simple pour tous les mineurs de Δ, on a

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0;$$

ceci veut dire que l'arête $A_1 A_2$ du dièdre T coupe la surface S en deux points distincts. Comme plus haut, on voit que ces deux points sont communs à toutes les surfaces U du faisceau, et qu'en chacun d'eux ces surfaces admettent toutes même plan tangent, distinct de chacun des plans du dièdre T. Si le faisceau a un dièdre comme autre surface singulière, les deux plans de ce dièdre sont les plans tangents communs aux surfaces U en ces deux points.

Si la racine $\lambda = 0$ est pour l'équation $\Delta = 0$ d'un ordre de multiplicité supérieur à deux, on a

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

puisque le discriminant de la forme g à deux variables n'est pas nul.

Alors, ou bien l'arête $A_1 A_2$ est tangente à la surface S, ou bien elle appartient à la surface S.

Dans le premier cas, soit A_1 le point où $A_1 A_2$ touche S, de sorte que

$$a_{11} = a_{12} = 0,$$

a_{22} n'étant pas nul, et soit $A_1 A_2 A_3$ le plan tangent à S en A, de sorte que

$$a_{13} = 0,$$

a_{14} n'étant pas nul.

On voit que toutes les quadriques du faisceau passent en A_1 et y touchent le plan $A_1A_2A_3$ et la droite A_1A_2. De plus

$$\Delta = -a_{14}^2\lambda^2 \begin{vmatrix} a_{22}\lambda & a_{23}\lambda \\ a_{23}\lambda & a_{33}\lambda + b_{33}\mu \end{vmatrix};$$

donc la racine $\lambda = 0$ n'est quadruple que si l'on a

$$b_{33} = 0,$$

c'est-à-dire si le plan $A_1A_2A_3$ est l'un des plans du dièdre T.

Ajoutons que, dans ce cas, on vérifie aisément que la racine $\lambda = 0$ n'est pas double pour tous les mineurs de Δ.

Dans le second cas, on a

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0,$$

et en prenant pour $A_1A_2A_3$ le plan tangent à S en A_1, on a en outre

$$a_{13} = 0,$$

avec

$$a_{14} \neq 0.$$

Toutes les quadriques du faisceau contiennent l'arête A_1A_2 et sont tangentes entre elles en chaque point de cette arête. De plus

$$\Delta = a_{14}^2 a_{23}^2 \lambda^4,$$

de sorte que

$$a_{23} \neq 0,$$

et la racine $\lambda = 0$ est quadruple pour $\Delta = 0$.

Ajoutons que, dans ce cas, on vérifie aisément que la racine $\lambda = 0$ est double, mais n'est pas triple pour tous les mineurs de Δ.

3° Supposons enfin qu'une surface singulière soit un plan double que nous prendrons pour la quadrique T, de sorte que la racine correspondante de l'équation $\Delta = 0$ est $\lambda = 0$. Si nous supposons que le plan $A_1 A_2 A_3$ compté deux fois constitue la surface T, on a

$$g = b_{44} x_4^2,$$

et, par suite,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda & a_{13}\lambda & a_{14}\lambda \\ a_{12}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23}\lambda & a_{24}\lambda \\ a_{13}\lambda & a_{23}\lambda & a_{33}\lambda & a_{34}\lambda \\ a_{14}\lambda & a_{24}\lambda & a_{34}\lambda & a_{44}\lambda + b_{44}\mu \end{vmatrix}.$$

Si la racine $\lambda = 0$ n'est que triple pour l'équation $\Delta = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

c'est-à-dire que le plan $A_1 A_2 A_3$, non tangent à la quadrique S, la coupe suivant une conique proprement dite. Toutes les quadriques U du faisceau passent par cette conique et sont tangentes entre elles en tout point de cette conique.

Si la racine $\lambda = 0$ est quadruple pour $\Delta = 0$, le plan $A_1 A_2 A_3$ tangent à S coupe S suivant deux droites distinctes sur lesquelles on peut répéter ce qui précède.

Enfin, ajoutons que l'on vérifie aisément que la racine $\lambda = 0$ n'est jamais double pour tous les mineurs du second ordre de Δ, ni jamais triple pour tous les mineurs du premier ordre de Δ.

6. Il va devenir facile maintenant d'étudier la nature des quadriques d'un faisceau, leurs points de contact et

leur courbe d'intersection suivant les propriétés des racines de l'équation $\Delta = 0$. Pour simplifier cette étude, commençons par faire les remarques suivantes :

Si deux quadriques d'un faisceau se touchent en un point, toutes les quadriques du faisceau se touchent en ce point, sauf une, qui admet ce point comme point singulier.

Si deux quadriques ont un point commun, qui n'est singulier pour aucune d'elles, et n'ont pas même plan tangent en ce point, ce point est simple pour leur intersection : car un plan quelconque passant par ce point coupe les deux quadriques suivant deux coniques, pour l'intersection desquelles ce point compte une seule fois.

De même, on voit que si deux quadriques ont un point commun singulier pour l'une d'elles, ce point es multiple pour leur intersection; il en est de même si, le point n'étant singulier pour aucune des deux surfaces, celles-ci ont même plan tangent en ce point.

Une quartique gauche proprement dite ne peut avoir qu'un seul point singulier, qui est double; les tangentes en ce point sont distinctes ou confondues; dans tous les cas, une tangente en un point double coupe la courbe en trois points confondus au point double, et pas davantage. Pour vérifier ces propositions, il suffit de remarquer qu'une quartique gauche est rencontrée par un plan en quatre points seulement. Une cubique gauche n'a pas de points singuliers.

Si l'intersection de deux quadriques contient une courbe plane, cette courbe est une droite ou une conique.

Si un plan coupe deux quadriques suivant une même courbe plane, le faisceau déterminé par ces deux quadriques contient une surface singulière composée de deux plans : car si $x_4 = 0$ est le plan sécant, on a

$$f = x_4 \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \alpha\varphi(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = x_4 \chi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta\varphi(x_1, x_2, x_3),$$

ψ et χ étant des formes linéaires, φ une forme quadratique, α et β des constantes; donc le faisceau $\lambda f + \mu g = 0$ contient le système de plans $\beta f - \alpha g = 0$.

Enfin, si l'intersection de deux quadriques n'est pas une quartique gauche proprement dite, elle contient au moins une droite ou une conique proprement dite.

7. Ces remarques faites, examinons successivement tous les cas qui peuvent se présenter d'après les propriétés des racines de l'équation $\Delta = 0$.

1° *L'équation* $\Delta = 0$ *a quatre racines simples.*

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières quatre cônes; les points singuliers sont les sommets de ces cônes, et chacun d'eux a pour plan polaire commun, par rapport à toutes les surfaces U, le plan des trois autres. Comme ces points ne sont pas sur les surfaces U, ils forment un tétraèdre.

Les surfaces U ne se touchent en aucun point.

La courbe C du faisceau ne contient pas de conique, sans quoi le faisceau contiendrait un dièdre; elle ne contient pas non plus de droite, car c'est l'intersection de deux cônes n'ayant pas de génératrice commune : c'est donc une quartique gauche proprement dite, sans point singulier, puisque les surfaces U n'ont aucun point de contact.

2° *L'équation* $\Delta = 0$ *a deux racines simples et une racine double n'annulant pas les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières

trois cônes; les points singuliers sont les sommets de ces cônes A, B, C.

Si A est le sommet du cône correspondant à la racine double, toutes les surfaces U sont tangentes en A au plan ABC. Les points B et C n'appartiennent pas aux surfaces U; les plans polaires communs de B et C, par rapport à toutes les surfaces U, passent respectivement par AC et AB, et, par suite, les points A, B, C forment un triangle. Les surfaces U ne se touchent qu'au point A; leur plan tangent commun ne touche pas le cône A.

La courbe C ne contient pas de conique; elle ne contient pas non plus de droite, car c'est l'intersection de deux cônes n'ayant pas de génératrice commune : c'est donc une quartique gauche proprement dite, ayant un point double en A. En ce point les tangentes sont distinctes : ce sont les génératrices d'intersection du cône A avec le plan ABC.

3° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine simple et une racine triple n'annulant pas les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières deux cônes; les points singuliers sont les sommets de ces cônes A, B. Si A est le sommet du cône correspondant à la racine triple, toutes les surfaces U sont tangentes en A à un plan passant par AB et tangent au cône A; elles n'ont pas d'autre contact. Le plan polaire commun de B par rapport à toutes les surfaces U passe en A. Comme plus haut, on voit que la courbe C est une quartique gauche proprement dite, ayant en A un point de rebroussement ordinaire : la tangente en ce point est la génératrice de contact du cône A avec le plan tangent commun à toutes les surfaces U en A.

4° *L'équation* $\Delta = 0$ *a deux racines doubles, dont aucune n'annule les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières deux cônes, dont les sommets A et B sont les points singuliers du faisceau.

Les surfaces U sont toutes tangentes entre elles en A et B, et n'ont pas d'autre contact; le plan tangent commun en chacun de ces points passe par l'autre, et, par suite, AB est génératrice commune aux surfaces U.

La courbe C du faisceau ne contient pas de conique et contient la génératrice AB une seule fois, puisque les cônes A et B ne sont pas tangents le long de cette droite : elle se compose donc de cette droite et d'une cubique gauche qui la rencontre en A et B.

5° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine quadruple n'annulant pas les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient une seule surface singulière, un cône dont le sommet A est le seul point singulier du faisceau. Les surfaces U sont tangentes entre elles en A et n'ont pas d'autre contact; leur plan tangent commun est tangent au cône A suivant une droite D qui appartient à toutes les surfaces U.

La courbe C du faisceau ne contient pas de conique et contient la droite D une seule fois, puisque les surfaces ne sont pas tangentes tout le long de D; elle ne peut d'ailleurs contenir une autre droite, puisque celle-ci appartiendrait au cône A. Elle se compose donc de la droite D et d'une cubique gauche qui lui est évidemment tangente en A.

6° *L'équation* $\Delta = 0$ *a deux racines simples, et une racine double annulant les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières

deux cônes de sommets A et B et un dièdre d'arête D. Les points singuliers du faisceau sont les points de D et en outre A et B. Les points A et B ne sont pas sur les surfaces U; la droite D coupe les surfaces U en deux points P et Q, et en chacun de ces points elles sont tangentes aux plans PAB et QAB, distincts des plans du dièdre; elles n'ont d'ailleurs pas d'autre contact.

Les plans polaires communs de A et B par rapport aux surfaces U sont les plans BPQ et APQ; les droites AB et D ne se rencontrent pas.

La courbe C du faisceau s'obtient en coupant le cône A par le dièdre d'arête D, dont les plans ne passent pas par A : elle se compose de deux coniques proprement dites se coupant en P et Q.

7° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine simple, et une racine triple annulant les mineurs du premier ordre* Δ, *mais n'annulant pas les mineurs du second ordre.*

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières un cône de sommet A et un dièdre d'arête D. Les points singuliers du faisceau sont les points de D et le point A.

Le point A n'est pas sur les surfaces U; la droite D touche les surfaces U en un point P, et en ce point elles sont tangentes à un plan passant par A et par D, distinct des plans du dièdre. Le plan polaire commun de A par rapport à toutes les surfaces U passe par D.

Comme plus haut, on voit que la courbe C se compose de deux coniques proprement dites situées dans les plans du dièdre et tangentes entre elles au point A.

8° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine double n'annulant pas les mineurs du premier ordre de* Δ, *et une autre racine double annulant tous ces mineurs.*

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières

un cône de sommet A et un dièdre d'arête D. Les points singuliers du faisceau sont les points de D et le point A. Le point A est situé sur les surfaces U, toutes tangentes en ce point au plan qui passe par A et par D La droite D coupe la surface U en deux points P et Q, et en chacun de ces points les surfaces ont un même plan tangent passant par A et distinct des plans du dièdre. Les surfaces U ont donc un triple contact.

L'un des plans du dièdre est le plan APQ, et, par suite, la courbe C se compose d'une conique proprement dite et de deux droites se coupant en A et rencontrant cette conique en P et Q.

9° *L'équation* $\Delta = 0$ *a deux racines doubles dont chacune annule les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières deux dièdres d'arêtes D et D' qui ne se rencontrent pas. Chacune d'elles coupe les surfaces U en deux points, P et Q pour D, P' et Q' pour D'. En chacun de ces points les surfaces U sont tangentes et, par suite, elles ont un quadruple contact. Le plan tangent commun en P est le plan PP'Q', appartenant au dièdre d'arête D', et ainsi des autres.

La courbe C se compose évidemment des quatre droites PP', PQ', QP', QQ', qui forment un quadrilatère gauche.

10° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine quadruple annulant les mineurs du premier ordre de* Δ, *mais n'annulant pas les mineurs du second ordre; en outre, cette racine n'est pas double pour tous les mineurs du premier ordre.*

Le faisceau Φ contient comme seule surface singulière un dièdre d'arête D; les points singuliers sont les points de D. La droite D touche les surfaces U en un point P; et, en ce point, toutes les surfaces U sont tangentes entre elles, et n'ont d'ailleurs pas d'autre contact. Leur plan tangent, commun en P, est l'un des plans du dièdre.

La courbe C se compose alors évidemment d'une conique proprement dite et de deux droites se coupant sur cette conique et situées dans un autre plan.

11° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine quadruple annulant les mineurs du premier ordre de* Δ, *mais n'annulant pas les mineurs du second ordre; en outre, cette racine est double pour tous les mineurs du premier ordre.*

Le faisceau Φ contient comme seule surface singulière un dièdre d'arête D; les points singuliers sont les points de D. La droite D est située sur les surfaces U qui se raccordent le long de cette droite.

La courbe C se compose évidemment de la droite D comptée deux fois et de deux droites rencontrant D en des points différents et déterminant avec D deux plans différents.

12° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine simple, et une racine triple annulant les mineurs du second ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières un cône de sommet A et un plan double P. Les points singuliers sont le point A et les points de P. Les surfaces U ne passent pas en A; le plan polaire commun de A par rapport aux surfaces U est le plan P. Le plan P coupe les surfaces U suivant une conique proprement dite, le long de laquelle les surfaces se raccordent; les plans tangents le long de cette conique passent tous par A.

La courbe C se compose de cette conique comptée deux fois.

13° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine quadruple annulant les mineurs du second ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient, comme surface singulière, un plan double P dont les points sont les points singuliers. Ce plan est tangent aux quadriques U et les coupe suivant deux droites le long desquelles ces surfaees se raccordent.

La courbe C se compose de ces deux droites comptées chacune deux fois.

8. Nous avons ainsi épuisé tous les cas possibles, et, chaque fois, nous sommes arrivés à des conclusions distinctes. Donc nous avons caractérisé toutes les espèces possibles de faisceaux de quadriques, et toutes les formes possibles de l'intersection de deux quadriques.

Il serait facile, comme application, d'étudier la situation respective des deux coniques que l'on obtient en coupant deux quadriques par un même plan passant par un point singulier de l'intersection.

Il est facile aussi de voir qu'un faisceau Φ de quadriques est complètement déterminé par la courbe C de ce faisceau toutes les fois que cette courbe ne contient ni conique double ni droite double. Si cette eourbe contient une seule droite double, il faut se donner en outre le plan tangent aux quadriques du faisceau en un point de cette droite autre que ses points d'intersection avec les deux autres droites qui appartiennent à la courbe. Si cette courbe est une conique double, il faut se donner en outre les plans tangents en trois points de cette conique; si elle est formée par deux droites doubles, il faut se donner les plans tangents aux quadriques en deux points de l'une de ces droites et en un point de l'autre.

Enfin, ajoutons qu'il serait facile de transformer, par la méthode des polaires réciproques, tout ce que nous avons dit et de faire une théorie toute pareille pour un faisceau tangentiel de quadriques et la développable circonscrite à deux quadriques : en faisant cette transformation, on remarquera d'ailleurs que $f' = 0$ et $g' = 0$ étant les équations tangentielles de deux quadriques dont les équations ponctuelles sont $f = 0$ et $g = 0$, les racines du discriminant de la forme $\lambda f' + \mu g'$ se déduisent par une transformation simple de celles du discriminant de la forme $\lambda f + \mu g$, et par suite jouissent des mêmes propriétés caractéristiques.