G. FOURET

Sur la quatrième partie du problème du dernier concours d'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 497-501

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__497_1>

SUR LA QUATRIÈME PARTIE DU PROBLÈME DU DERNIER CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. G. FOURET.

1. Nous nous proposons de montrer ici comment les propriétés les plus élémentaires du complexe linéaire permettent de traiter géométriquement, d'une manière simple, la question que nous avons en vue et dont

l'énoncé, légèrement transformé, est compris dans le suivant :

Étant donnés un point o et quatre droites D, D′, Δ, Δ′ *d'un hyperboloïde, faisant partie d'un même mode de génération, par le point o on mène un plan quelconque; on joint les points où ce plan rencontre* D *et* D′ *et les points où il rencontre* Δ *et* Δ′. *Trouver le lieu du point d'intersection des deux droites obtenues et examiner le cas particulier où le point o est sur l'hyperboloïde.*

2. Parmi les plans qui passent en o, considérons d'abord ceux qui sont tangents à l'hyperboloïde. Un tel plan coupe la surface suivant deux droites, dont l'une G s'appuie à la fois sur D, D′, Δ et Δ′. Tous les points de G satisfont manifestement à la définition du lieu. L'hyperboloïde, considéré comme engendré par G, fait donc partie de ce lieu. Voyons de quelle manière celui-ci se complète.

3. Supposons d'abord que le point o n'appartienne pas à l'hyperboloïde. Imaginons les deux congruences linéaires, ayant pour directrices, l'une D et D′, l'autre Δ et Δ′. Ces quatre droites étant sur un même hyperboloïde, les deux congruences font partie d'un même complexe linéaire, relativement auquel D et D′, Δ et Δ′ forment deux couples de droites conjuguées. Les droites ox et oy qui s'appuient, la première sur D et D′, la seconde sur Δ et Δ′, appartiennent respectivement aux deux congruences, par suite au complexe, et le plan ω qu'elles déterminent a pour pôle, par rapport à ce complexe, le point o.

Par o faisons passer un plan quelconque ϖ, non tangent à l'hyperboloïde. Les droites qui joignent respectivement les points de rencontre de ce plan, d'une part avec D et D$'$, de l'autre avec Δ et Δ', font partie du complexe et leur point d'intersection p est le pôle du plan ϖ. Or, le plan ϖ passant par o, son pôle p est dans le plan polaire ω du point o. Le lieu des points tel que p est donc dans le plan ω déterminé par les droites ox et oy.

4. Supposons maintenant le point o sur l'hyperboloïde. Par o passent deux droites sur cette surface, l'une, H, rencontrant à la fois les droites D, D$'$, Δ et Δ', l'autre, K, ne les rencontrant pas. La droite H fait partie à la fois des deux congruences linéaires et, par conséquent, du complexe linéaire. Ainsi que nous l'avons démontré tout à l'heure, le lieu du point p est encore le plan polaire ω du point o. Seulement ce plan ω n'est plus, comme dans le premier cas, déterminé par deux droites connues. Nous savons seulement qu'il passe par la droite H. Nous allons faire voir, suivant une remarque déjà faite par M. Laisant, qu'il forme, avec le plan tangent en o à l'hyperboloïde, un couple de plans conjugués, dans une involution dont deux autres couples sont formés, l'un des plans HD et HD$'$, l'autre des plans HΔ et HΔ'.

A cet effet, considérons, comme c'est ici le cas, un complexe linéaire et un hyperboloïde dont un des systèmes de génératrices soit composé de droites du complexe. Les génératrices de l'autre système forment deux à deux des couples de droites conjuguées par rapport à ce complexe, en raison de ce que les droites d'un complexe linéaire, qui rencontrent une même droite, rencontrent en même temps sa conjuguée. Soient A et A$'$ deux génératrices de l'hyperboloïde, conjuguées par rapport au complexe. Dans le faisceau des plans passant par H, les plans tels que HA et HA′ sont liés par une correspondance homographique symétrique. Ce couple variable de plans forme donc une involution, dont font partie les couples de plans HD, HD′ et HΔ, HΔ'.

Soit K′ la seconde droite suivant laquelle le plan polaire ω du point o, qui contient déjà la droite H, coupe l'hyperboloïde. Cette droite est conjuguée de K par rapport au complexe. Par suite, le plan HK′, c'est-à-dire le plan polaire du point o, qui est le lieu du point p, est conjugué du plan HK, c'est-à-dire du plan tangent en o à l'hyperboloïde, dans l'involution déterminée par les deux couples de plans HD, HD′ et HΔ, HΔ'.

Il résulte de là que le plan ϖ, lieu du point p, ne varie pas lorsque l'hyperboloïde se déforme, de manière que le point o et le plan tangent ω en o restent fixes et que les droites D, D′, Δ, Δ' se déplacent respectivement dans des plans passant par le point o.

5. *Remarque.* — Considérons un hyperboloïde sur lequel les génératrices d'un même système sont *associées* deux à deux, de manière à former des couples de droites conjuguées relativement à un complexe linéaire, comprenant les génératrices de l'autre système. Par un point quelconque de l'espace, faisons passer une suite de droites rencontrant chacune deux génératrices associées de l'hyperboloïde. Ces droites font partie du complexe linéaire et, par suite, sont situées dans un même plan, le plan polaire du point considéré.

De là résulte un moyen simple, applicable d'une infinité de manières, d'associer par couples les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde au moyen d'un plan pris arbitrairement et d'un point choisi à volonté dans ce plan. Ce mode d'association des génératrices d'un hyperboloïde a été imaginé par Chasles ([1]), dans une Note qui peut être considérée comme l'origine de l'étude du complexe linéaire et où l'on trouve énoncés, entre autres théorèmes, les deux suivants, dont la démonstration résulte immédiatement de ce qui vient d'être dit, à savoir :

Un plan quelconque coupe les génératrices associées d'un hyperboloïde en une série de couples de points Les droites, joignant chacune les deux points d'un de ces couples, passent par un même point.

Inversement, si d'un point quelconque on mène une série de droites, s'appuyant chacune sur deux droites associées d'un hyperboloïde, les droites ainsi obtenues sont dans un même plan.