Nouvelles annales de mathématiques

L. Sauvage

Note sur les équations en λ de la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 369-385

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__369_1>

NOTE SUR LES ÉQUATIONS EN λ DE LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. L. SAUVAGE,
Professeur à la Faculté de Marseille.

1. On sait discuter les équations en λ des second, troisième et quatrième degrés, qui se rencontrent en Géométrie analytique, par exemple dans l'étude des couples de faisceaux de deux droites concourantes, dans celle des couples de coniques, dans celles des couples de surface du second ordre. *J'admettrai les résultats connus,* qui s'obtiennent par divers procédés. Je signa-

lerai cependant que c'est Painvin qui a traité complètement la question de l'équation en λ du quatrième degré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1867-1868).

Maîs il est un point qui n'a pas été encore, à ma connaissance, signalé dans les Ovrages elémentaires, et qu'il ne me paraît plus possible de laisser aujourd'hui dans l'ombre après les beaux travaux de M. Weierstrass (*Monatsberichte*, 1868), de M. Darboux et de M. Jordan dans le *Journal de Liouville* (1874). Je veux parler de la notion de *diviseur élémentaire*, et c'est elle que je désire mettre en lumière dans cette Note.

2. Soient d'abord deux formes quadratiques binaires, c'est-à-dire à deux variables indépendantes

$$f = A_{11}\,x_1^2 + A_{22}\,x_2^2 + 2A_{12}\,x_1\,x_2, \tag{1}$$

$$f_1 = B_{11}\,x_1^2 + B_{22}\,x_2^2 + 2B_{12}\,x_1\,x_2. \tag{2}$$

Soient λ_1 et λ_2 les deux racines de l'équation

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}+\lambda B_{11} & A_{12}+\lambda B_{12} \\ A_{12}+\lambda B_{12} & A_{22}+\lambda B_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

On sait que l'on peut, en général, ramener les deux formes f et f_1 aux formes

$$\varphi = \lambda_1\,X_1^2 + \lambda_2\,X_2^2. \tag{4}$$

$$\varphi_1 = -X_1^2 - X_2^2, \tag{5}$$

où X_1 et X_2 représentent des formes linéaires indépendantes de x_1 et de x_2.

Discussion. Premier cas. — λ_1 et λ_2 sont des racines distinctes, c'est le cas des formules (4) et (5).

Deuxième cas. — λ_1 et λ_2 sont des racines égales entre elles, mais annulent à la fois tous les termes du déterminant $\Delta(\lambda)$; on est ramené aux formes

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_1 X_2^2,$$
$$\varphi_1 = - X_1^2 - X_2^2,$$

qui ne diffèrent pas essentiellement des formes (4) et (5).

Troisième cas. — λ_1 est une racine double de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, et n'annule pas tous les éléments de $\Delta(\lambda)$; on pose alors

$$(6) \qquad \varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_2^2,$$
$$(7) \qquad \varphi_1 = - 2X_1 X_2.$$

Il n'y a pas d'autre cas, si le déterminant $B_{12}^2 - B_{11} B_{22}$ n'est pas nul.

Reprenons la discussion, et, au lieu des racines de l'équation en λ, introduisons les diviseurs $\lambda_1 - \lambda$ ou, si l'on veut, $\lambda - \lambda_1$ du déterminant $\Delta(\lambda)$ supposé développé et ordonné par rapport à λ. Nous aurons les cas suivants :

Premier cas. — $\Delta(\lambda)$ admet deux diviseurs $\lambda - \lambda_1$ et $\lambda - \lambda_2$, et, si l'on a $\lambda_1 = \lambda_2$, les mineurs du premier ordre de $\Delta(\lambda)$, c'est-à-dire les éléments du déterminant $\Delta(\lambda)$, admettent aussi tous ensemble ce diviseur. On pose alors

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2,$$
$$\varphi_1 = - X_1^2 - X_2^2,$$

et l'on peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.

Deuxième cas. — $\Delta(\lambda)$ admet un diviseur double $\lambda - \lambda_1$ qui n'annule pas tous les mineurs de $\Delta(\lambda)$; on pose

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_2^2,$$
$$\varphi_1 = - 2X_1 X_2.$$

Dans le premier cas, on dira que le déterminant $\Delta(\lambda)$

admet *deux diviseurs élémentaires simples,* distincts ou non. Dans le second cas, on dira que le déterminant $\Delta(\lambda)$ admet un *diviseur élémentaire double.*

3. Soient maintenant deux formes quadratiques ternaires

$$(8)\quad \begin{cases} f = A_{11}\,x_1^2 + A_{22}\,x_2^2 + A_{33}\,x_3^2 \\ \qquad\qquad + 2A_{12}\,x_1\,x_2 + 2A_{23}\,x_2\,x_3 + 2A_{31}\,x_3\,x_1, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} f_1 = B_{11}\,x_1^2 + B_{22}\,x_2^2 + B_{33}\,x_3^2 \\ \qquad\qquad + 2B_{12}\,x_1\,x_2 + 2B_{23}\,x_2\,x_3 + 2A_{31}\,x_3\,x_1, \end{cases}$$

et λ_1, λ_2, λ_3 les trois racines de l'équation en (λ)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}+\lambda B_{11} & A_{12}+\lambda B_{12} & A_{13}+\lambda B_{13} \\ A_{21}+\lambda B_{21} & A_{22}+\lambda B_{22} & A_{23}+\lambda B_{23} \\ A_{31}+\lambda B_{31} & A_{32}+\lambda B_{32} & A_{33}+\lambda B_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on suppose $A_{ij} = A_{ji}$ et $B_{ij} = B_{ji}$.

En outre, le déterminant

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro.

Appelons alors X_1, X_2, X_3 trois formes linéaires indépendantes de x_1, x_2, x_3; nous pouvons choisir ces formes de manière que les formes quadratiques f et f_1 soient simplifiées d'après les règles suivantes :

Premier cas. — λ_1, λ_2, λ_3 sont trois racines distinctes. On peut, au moyen d'une substitution convenable (en Géométrie, on fait un changement de coordonnées), ramener les formes f et f_1 aux formes

$$(10)\qquad \varphi = \lambda_1\,X_1^2 + \lambda_2\,X_2^2 + \lambda_3\,X_3^2,$$

$$(11)\qquad \varphi_1 = -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Deuxième cas. — Les deux racines λ_1 et λ_2 sont égales et diffèrent de λ_3. Mais la racine λ_1 satisfait à toutes les équations obtenues en égalant à zéro les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(\lambda)$.

On posera

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_1 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2,$$
$$\varphi_1 = - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Troisième cas. — Les trois racines λ_1, λ_2, λ_3 sont égales, et λ_1 satisfait non seulement aux équations précédentes, mais encore aux équations obtenues en égalant à zéro les mineurs du second ordre de $\Delta(\lambda)$, c'est-à-dire les éléments eux-mêmes de ce déterminant.

On posera

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_1 X_2^2 + \lambda_1 X_3^2,$$
$$\varphi_1 = - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Ces trois cas ne diffèrent pas essentiellement par les formes φ qui leur correspondent.

Quatrième cas. — Les deux racines λ_1 et λ_2 sont égales et diffèrent de λ_3. Mais les conditions du second cas ne sont pas satisfaites.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2 + \lambda_3 X_3^2, \tag{12}$$
$$\varphi_1 = - 2X_1 X_2 - X_3^2. \tag{13}$$

Cinquième cas. — Les trois racines λ_1, λ_2, λ_3 sont égales, mais les conditions du second cas sont satisfaites, et celles du troisième cas ne le sont pas.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2 + \lambda_1 X_3^2,$$
$$\varphi_1 = - 2X_1 X_2 - X_3^2.$$

Ce cas ne diffère pas essentiellement du précédent.

Sixième cas. — La racine triple λ_1 ne satisfait pas aux conditions du second cas.

On posera

(14) $$\varphi = \lambda_1(2X_3X_1 + X_2^2) + 2X_1X_2,$$

(15) $$\varphi_1 = -(2X_3X_1 + X_2^2).$$

4. Reprenons la discussion précédente en employant les diviseurs de $\Delta(\lambda)$ considéré comme un polynome du troisième degré en λ. En outre, les mineurs du premier ordre seront considérés comme des polynomes du second degré en λ, et les mineurs du second ordre, ou les éléments eux-mêmes du déterminant $\Delta(\lambda)$, seront des polynomes du premier degré en λ. Nous distinguerons alors les cas suivants :

Premier cas. — $\Delta(\lambda)$ admet trois diviseurs distincts $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, $\lambda - \lambda_3$;

Ou bien, s'ils ne sont pas distincts, le diviseur double $\lambda - \lambda_1$ est aussi diviseur de tous les mineurs du premier ordre de $\Delta(\lambda)$;

Ou même, s'ils sont égaux, le diviseur triple $\lambda - \lambda_1$ est diviseur de tous les mineurs du second ordre de $\Delta(\lambda)$.

On posera

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2,$$
$$\varphi_1 = -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Deuxième cas. — $\Delta(\lambda)$ admet deux diviseurs distincts $\lambda - \lambda_1$ et $\lambda - \lambda_2$, et le diviseur double $\lambda - \lambda_1$ n'est pas diviseur des mineurs du premier ordre ;

Ou bien, si λ_1 et λ_2 ne sont pas distincts, $\lambda - \lambda_1$ n'est pas diviseur de tous les mineurs de second ordre, mais est diviseur de tous ceux du premier ordre.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2 + \lambda_2 X_3^2,$$
$$\varphi_1 = -2X_1X_2 - X_3^2.$$

Troisième cas. — Le diviseur triple $\lambda - \lambda_1$ n'est pas diviseur de tous les mineurs du premier ordre de $\Delta(\lambda)$.

On posera

$$\varphi = \lambda_1(2X_3X_1 + X_2^2) + 2X_1X_2,$$
$$\varphi_1 = -(2X_3X_1 + X_3^2).$$

Dans le premier cas, on dira que $\Delta(\lambda)$ admet trois *diviseurs élémentaires simples*. Il importe peu qu'ils soient distincts ou non comme *diviseurs linéaires*.

Dans le second cas, on dira que $\Delta(\lambda)$ admet un *diviseur élémentaire double* $\lambda - \lambda_1$ et un *diviseur élémentaire simple* $\lambda - \lambda_2$. On peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.

Dans le troisième cas, on dira que $\Delta(\lambda)$ admet un *diviseur élémentaire triple*.

5. Sans entrer dans les détails de la longue discussion de Painvin, on peut la ramener aux cas qui vont suivre.

Soient

$$f = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{44}x_4^2 + 2\Sigma A_{ij}x_iy_j,$$
$$f' = B_{11}x_1^2 + B_{22}x_3^2 + B_{33}x_3^2 + B_{44}x_4^2 + 2\Sigma B_{ij}x_iy_j$$

deux formes quadratiques quaternaires.

Considérons le déterminant symétrique

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}+\lambda B_{11} & A_{12}+\lambda B_{12} & A_{13}+\lambda B_{13} & A_{14}+\lambda B_{14} \\ A_{21}+\lambda B_{21} & A_{22}+\lambda B_{22} & A_{23}+\lambda B_{23} & A_{24}+\lambda B_{24} \\ A_{31}+\lambda B_{31} & A_{32}+\lambda B_{32} & A_{33}+\lambda B_{33} & A_{34}+\lambda B_{34} \\ A_{41}+\lambda B_{41} & A_{42}+\lambda B_{42} & A_{43}+\lambda B_{43} & A_{44}+\lambda B_{44} \end{vmatrix}$$

comme un polynome du quatrième degré en λ, et ses mineurs des ordres successifs comme des polynomes du troisième, du second et du premier degré.

Premier cas. — $\Delta(\lambda)$ a quatre diviseurs distincts $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, $\lambda - \lambda_3$, $\lambda - \lambda_4$;

Ou bien, si $\lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient à tous les mineurs du premier ordre

Ou bien, si $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient à tous les mineurs du second ordre;

Ou bien, si $\lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient à tous les mineurs du troisième ordre, c'est-à-dire aux éléments eux-mêmes du déterminant $\Delta(\lambda)$.

On posera

$$\varphi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2,$$
$$\varphi_1 = - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2,$$

et il importe peu que les valeurs λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 soient distinctes entre elles, si l'on ne considère que les formes φ.

Deuxième cas. — Le diviseur double $\lambda - \lambda_1$ ne convient pas à tous les mineurs du premier ordre; les autres diviseurs $\lambda - \lambda_2$ et $\lambda - \lambda_3$ sont distincts de $\lambda - \lambda_1$ et distincts entre eux;

Ou bien, si $\lambda_2 = \lambda_3$, le diviseur $\lambda - \lambda_2$ convient aux mineurs du premier ordre;

Ou bien, si $\lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient aux mineurs du premier ordre, mais non à ceux du second ordre;

Ou bien, si $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient une fois à tous les mineurs, excepté à ceux du troisième ordre.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2 + \lambda_2 X_3^2 + \lambda_3 X_4^2,$$
$$\varphi_1 = - 2X_1 X_2 - X_3^2 - X_4^2.$$

Il importe peu que λ_1, λ_2, λ_3 soient distincts.

Troisième cas. — Le diviseur triple $\lambda - \lambda_1$ ne convient pas aux mineurs du premier ordre; l'autre diviseur $\lambda - \lambda_2$ est distinct du précédent;

Ou bien, si $\lambda_2 = \lambda_1$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient aux mineurs du premier ordre, mais non à ceux du second ordre.

On posera

$$\varphi = \lambda_1(2X_3X_1 + X_2^2) + 2X_1X_2 + \lambda_2 X_4^2,$$
$$\varphi_1 = -(2X_3X_1 + X_2^2) - X_4^2.$$

Il importe peu que λ_1 et λ_2 soient des quantités différentes.

Quatrième cas. — Le diviseur quadruple $\lambda - \lambda_1$ ne convient pas aux mineurs du premier ordre.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1(X_1X_4 + X_2X_3) + (2X_1X_3 + X_2^2),$$
$$\varphi_1 = -2(X_1X_4 + X_2X_3).$$

Cinquième cas. — Les deux diviseurs doubles $\lambda - \lambda_1$ et $\lambda - \lambda_2$ ne conviennent séparément pas aux mineurs du premier ordre;

Ou bien, si $\lambda_1 = \lambda_2$, le diviseur $\lambda - \lambda_1$ convient deux fois aux mineurs du premier ordre, mais non à ceux du second ordre.

On posera

$$\varphi = 2\lambda_1 X_1X_2 + X_1^2 + 2\lambda_2 X_3X_4 + X_3^2,$$
$$\varphi_1 = -2X_1X_2 - 2X_3X_4.$$

6. On dira que le déterminant $\Delta(\lambda)$ admet dans le premier cas *quatre diviseurs élémentaires simples;*

Dans le second cas, *un diviseur élémentaire double* et *deux diviseurs élémentaires simples;*

Dans le troisième cas, *un diviseur élémentaire triple* et *un diviseur élémentaire simple;*

Dans le quatrième cas, *un diviseur élémentaire quadruple;*

Dans le cinquième cas, *deux diviseurs élémentaires doubles.*

7. Définissons maintenant les *diviseurs élémentaires* (*Elementartheiler* de M. Weierstrass). Posons

$$[P, Q] = \begin{vmatrix} pA_{11} + qB_{11} & \dots & pA_{1n} + qB_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ pA_{n1} + qB_{n1} & \dots & pA_{nn} + qB_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant $[P, Q]$ est une fonction entière et homogène du degré n en p et q. C'est donc le produit de n facteurs de la forme $ap + bq$, distincts ou non.

Nous dirons que $ap + bq$ est un *diviseur linéaire* de $[P, Q]$ par opposition à l'expression de *diviseur élémentaire* qui en sera distincte dans la suite.

Un mineur du premier ordre de $[P, Q]$ est aussi homogène en p et q. Soit l_1 l'exposant du diviseur linéaire $ap + bq$ qui entre à la fois dans tous les mineurs du premier ordre.

De même, soient l_2, l_3, ... les exposants du diviseur linéaire $ap + bq$ qui entre à la fois dans tous les mineurs du deuxième, du troisième ordre, etc.

Par symétrie, appelons l_0 l'exposant du diviseur linéaire $ap + bq$ dans le déterminant $[P, Q]$ lui-même.

Nous entendons par là que le plus grand commun diviseur des mineurs du premier ordre, par exemple, est divisible par $(ap + bq)^{l_1}$.

On aura d'abord

$$l_0 > l_1 > l_2 > l_3 > \dots.$$

Car, si les mineurs du troisième ordre, par exemple, sont divisibles par $(ap + bq)^{l_3}$, tout mineur du deuxième ordre étant une expression linéaire et homogène de mineurs du troisième ordre sera divisible aussi par $(ap + bq)^{l_3}$.

D'un autre côté, les dérivées partielles d'un mineur du second ordre par rapport à chacune des lettres p et

q sont aussi des fonctions linéaires et homogènes de mineurs du troisième, et admettent par suite le diviseur $(ap + bq)^{l_3}$.

D'après la règle connue des diviseurs multiples, on devra avoir

$$l_2 \geqq l_3 + 1.$$

Cela posé, soient

$$l_0 - l_1 = e_0, \qquad l_1 - l_2 = e_1, \qquad \dots, \qquad l_k = e_k,$$

si l_k est le dernier nombre l qui ne soit pas nul ; nous aurons

$$e_0 + e_1 + \dots + e_k = l_0,$$

et, par suite,

$$(ap + bq)^{l_0} = (ap + bq)^{e_0}(ap + bq)^{e_1} \dots (ap + bq)^{e_k}.$$

Chacun des diviseurs $(ap + bq)^e$ est appelé un *diviseur élémentaire* du déterminant [P, Q]. C'est donc un facteur du quotient des plus grands communs diviseurs respectifs des mineurs de deux ordres successifs.

Chaque diviseur élémentaire est essentiellement caractérisé par le rapport de deux coefficients a et b et par un exposant e. Le diviseur élémentaire est simple si $e = 1$, et d'un ordre de multiplicité e, si $e \neq 1$.

On peut représenter tous les diviseurs élémentaires dans un ordre quelconque par la notation

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad (a_2 p + b_2 q)^{e_2}, \quad \dots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho}.$$

Mais les indices 1, 2, ..., ρ n'indiquent pas que les diviseurs linéaires $a_i p + b_i q$ soient nécessairement distincts. Plusieurs peuvent être égaux entre eux.

On a de plus

$$e_1 + e_2 + \dots + e_\rho = n,$$

et le nombre ρ peut être égal ou supérieur au nombre des diviseurs linéaires distincts.

Si tous les diviseurs élémentaires fournis par le diviseur linéaire $(ap + bq)^{k+1}$ sont *simples*, le déterminant $[P, Q]$ sera divisible par $(ap + bq)^{k+1}$, ses mineurs du premier ordre seront divisibles par $(ap + bq)^k$, ...; ses mineurs de l'ordre k seront divisibles par $ap + bq$.

8. Reprenons, par exemple, le premier cas de Painvin, en faisant $p = 1$, $q = \lambda$.

Si l'on a

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4,$$

chaque diviseur linéaire $\lambda - \lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ divisera $\Delta(\lambda)$, mais ne divisera par tous les mineurs du premier ordre. On aura donc quatre diviseurs élémentaires simples.

Si l'on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4,$$

le diviseur $\lambda - \lambda_1$ divisera deux fois $\Delta(\lambda)$, et une fois chaque mineur du premier ordre. On aura

$$l_0 = 2, \qquad l_1 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad e_0 = e_1 = 1,$$

et l'on obtiendra deux diviseurs élémentaires simples de la forme $\lambda - \lambda_1$ en même temps que les diviseurs élémentaires simples $\lambda - \lambda_3$ et $\lambda - \lambda_4$.

Si l'on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 = \lambda_4,$$

on aura quatre diviseurs élémentaires simples, égaux deux à deux, savoir deux diviseurs élémentaires simples

$$\lambda - \lambda_1 (\text{car } l_0 = 2,\ l_1 = 1,\ e_0 = e_1 = 1),$$

et deux diviseurs élémentaires simples

$$\lambda - \lambda_3 (\text{car } l_0 = 2, l_1 = 1, e_0 = e_1 = 1), \quad \ldots.$$

Ajoutons une remarque au premier cas de Painvin. On y fait l'hypothèse que $\lambda - \lambda_1$ est diviseur de tous les mineurs du second ordre quand $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, et l'on ne parle pas des mineurs du premier ordre, car l'hypothèse faite est suffisante, d'après la théorie du n° 7, pour que $\lambda - \lambda_1$ soit un diviseur linéaire double des mineurs du premier ordre, et un diviseur linéaire triple de $\Delta(\lambda)$.

On peut revoir, au même point de vue, toutes les discussions du commencement de cette Note.

9. Voici, sans démonstrations, les propriétés générales des diviseurs élémentaires qu'on devra réunir à celles que l'on a déjà vues au n° 7.

Soient

$$P = \Sigma A_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$
$$Q = \Sigma B_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n; \qquad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}, \qquad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha})$$

deux formes quadratiques.

Le déterminant

$$[Q] = \begin{vmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

n'étant pas supposé nul, le déterminant $[P, Q]$ sera du degré n exactement.

Théorème I. — *Si la substitution*

$$x_\alpha = \sum_\gamma h_{\alpha\gamma} x'_\gamma \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$$

transforme les deux formes quadratiques P *et* Q *en deux autres formes* P′ *et* Q′, *et, si le déterminant de la substitution n'est pas nul, les déterminants* $[P, Q]$ *et* $[P', Q']$ *ont les mêmes diviseurs élémentaires.*

Si l'on veut, un changement de coordonnées n'altère pas, non seulement les racines de l'équation en λ, *mais encore les diviseurs élémentaires du déterminant* $\Delta(\lambda)$.

THÉORÈME II. — *En supposant que*

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad (a_2 p + b_2 q)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho}$$

soient les diviseurs élémentaires du déterminant $[P, Q]$, *choisissons deux nombres* g *et* h *qui n'annulent pas* $gP + hQ$, *et, en admettant que les valeurs* a_i *et* b_i, *dont le rapport seul est essentiel, satisfassent aux conditions*

$$g a_i + h b_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

on peut déterminer n *formes linéaires indépendantes*

$$X_0^i, \quad X_1^i, \quad \ldots, \quad X_{e_i-1}^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho)$$

telles que l'on ait

$$P = \sum_i [a_i (X)_{e_i} - h (X)_{e_i-1}],$$

$$Q = \sum_i [b_i (X)_{e_i} + g (X)_{e_i-1}],$$

avec les conventions

$$(X)_0 = 0,$$
$$(X)_e = X_0 X_{e-1} + X_1 X_{e-2} + \ldots + X_{e-1} X_0.$$

On voit, en particulier, que, si tous les nombres e sont égaux à l'unité, on est ramené à la décomposition simultanée de deux formes quadratiques au moyen de n mêmes carrés.

THÉORÈME III. — C'est la réciproque du théorème I. *Si les formes* P, Q, P′, Q′ *sont telles que les déterminants* $[P, Q]$ *et* $[P', Q']$ *aient les mêmes diviseurs élémentaires, on peut déterminer des constantes telles* *que la substitution*

$$x_\alpha = \sum_\gamma h_{\alpha\gamma} x'_\gamma \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$$

ait son déterminant différent de zéro et ramène P *à* P′ *et* Q *à* Q′.

Théorème IV. — C'est la réciproque du théorème II. *Prenons les nombres* $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ *et les constantes* g, h, a *et* b *sous les conditions*

$$\Sigma e_i = n,$$
$$g a_i + h b_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

et posons

$$\begin{aligned} P'_i &= a_i(X)_{e_i} - h(X)_{e_i - 1}, \\ Q'_i &= b_i(X)_{ie} + g(X)_{e_i-1}, \\ P' &= \Sigma P'_i, \\ Q' &= \Sigma Q'_i. \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant les X *par des formes linéaires indépendantes en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *nous obtiendrons les formes* P *et* Q les plus générales, *telles que le déterminant* [P, Q] *ait pour diviseurs élémentaires les diviseurs* $(a_i p + b_i q)^{e_i}$.

Ce théorème est très important, et explique la règle suivante. Considérons un déterminant de la forme

$$[P_i, Q_i] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_1 - \lambda \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 - \lambda & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_1 - \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il admet un seul diviseur élémentaire $(\lambda_1 - \lambda)^{l_i}$.

Formons un Tableau de ρ déterminants analogues dont les diagonales principales se succèdent sur une ligne unique qui servira de diagonale à un grand déterminant $[P, Q]$. Tous les éléments de $[P, Q]$ n'entrant pas dans les $[P_i, Q_i]$ sont supposés nuls. On obtiendra ainsi la *forme canonique* du déterminant $[P, Q]$ qui a n diviseurs élémentaires égaux à

$$(a_i p + b_i q)^{e_i} (i = 1, 2, \ldots, \rho).$$

On n'a pas procédé autrement pour trouver les formes φ et φ_1 dans la discussion du problème de Painvin.

THÉORÈME V. — *Pour que* P *et* Q *se ramènent à des sommes de carrés positifs ou négatifs, il faut et il suffit que tout diviseur linéaire du degré l dans* $[P, Q]$ *soit un diviseur des mineurs de l'ordre $l - 1$.*

Ce théorème est toujours applicable quand les deux formes P et Q sont à coefficients réels, et que l'on peut trouver une forme $gP + hQ$ qui ne s'annule pour aucun système de valeurs réelles $x_1, \ldots, x_n$, si ce n'est pour des valeurs toutes égales à zéro.

Par exemple, soient les deux formes

$$f = \Sigma A_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2 \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$
$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Puisque la forme f_1 ne peut s'annuler qu'en égalant à zéro toutes les variables x, après exclusion des solutions imaginaires, il est nécessaire que le déterminant $\Delta(s)$, où s remplace la lettre λ employée jusqu'ici, n'ait que des diviseurs élémentaires simples et réels.

Comme corollaire de la proposition, on voit que toute *équation en s* a toutes ses racines réelles, que chaque racine double annule les mineurs du premier ordre de $\Delta(s)$, etc.

On remarquera qu'un déterminant $\Delta(\lambda)$, qui n'a que des diviseurs élémentaires simples et réels, peut s'appeler généralement un déterminant en s, car on peut le ramener à la forme ordinaire $\Delta(s)$ par l'application des théorèmes précédents.

10. Si les déterminants $[P]$ et $[Q]$ sont nuls, on cherchera deux nombres m et n tels que le déterminant

$$[Q_1] = [mP + nQ]$$

ne soit pas nul, et l'on substituera la forme Q_1 à la forme Q avant d'appliquer les principes précédents.

Mais il peut arriver qu'*il n'existe aucune forme* Q_1 *dont le déterminant ne soit pas nul.* Dans ce cas, M. Darboux a montré qu'on peut ramener les deux formes P et Q à l'étude d'autres formes P′ et Q′ *d'un nombre moindre de variables indépendantes* et satisfaisant aux principes précédents.

Il me semble inutile de chercher des démonstrations des propositions énoncées dans cette Note en dehors des *Méthodes parfaites* de M. Darboux (*Journal de Liouville,* 1874). A peine, dans quelques cas très simples de Géométrie analytique, peut-on essayer des procédés spéciaux. Nous renverrons donc au *grand Mémoire* de M. Darboux le lecteur dont cette Note aura excité l'intérêt.