NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Les propriétés focales des coniques obtenues au moyen de la méthode des polaires réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 353-364

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__353_0>

LES PROPRIÉTÉS FOCALES DES CONIQUES OBTENUES AU MOYEN DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES [1];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

---

1. Étant donnés une conique K, dont l'équation est $K = 0$, et un point $P(\alpha, \beta)$, l'équation générale des coniques qui passent par les points d'intersection de la conique K et du cercle P de rayon nul, qui a le point (α, β) pour centre, est

$$K + \lambda[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = 0. \tag{1}$$

Comme les quatre points d'intersection du cercle P et de la conique K sont imaginaires, le système (1) comprend un seul couple de droites réelles Δ et Δ'. Ces droites seront dites, par analogie avec une expression proposée par Chasles [2], les *conjointes du point* P *et de la conique* K.

Parmi les couples de cordes imaginaires communes au cercle P et à la conique K se trouvent les *droites isotropes* passant au point P

$$(x - \alpha) + i(y - \beta) = 0,$$
$$(x - \alpha) - i(y - \beta) = 0,$$

c'est-à-dire, les droites qui unissent le point P aux

---

[1] Communication faite le 8 avril 1887 à la Société mathématique d'Edimbourg.

[2] *Journal de Liouville*, t. III, p. 385.

ombilics I et J du plan, points imaginaires situés sur la droite de l'infini et par où passent tous les cercles du plan.

Une première conséquence de cette remarque est que *le point* P *a même polaire relativement à la conique* K *et aux conjointes* Δ *et* Δ'. Les conjointes passent en effet, d'après ce qui précède, par les points communs à la conique K et aux droites PI et PJ.

Par conséquent, le point de rencontre des conjointes Δ et Δ' se trouve sur la polaire du point P, relativement à la conique K. On peut observer aussi qu'en vertu d'une propriété générale des coniques passant par l'intersection d'une conique et d'un cercle, *les conjointes* Δ et Δ' *sont également inclinées sur les axes de la conique* K.

Une deuxième conséquence de la remarque faite plus haut est que, parmi les conjointes d'un point et d'un cercle, se trouve toujours la droite à l'infini du plan. L'autre conjointe, située à distance finie, est l'*axe radical du point et du cercle,* dont les propriétés sont bien connues.

On voit tout de suite que les conjointes du centre d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et de cette courbe sont données par

$$y = \pm \frac{ab}{c};$$

et celles du centre d'une hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

par

$$x = \pm \frac{ab}{c}.$$

Dans le cas de l'ellipse, *les tangentes menées des extrémités du grand axe au cercle qui a pour diamètre le petit axe, coupent ce petit axe aux points par où passent les conjointes du centre qui sont, d'ailleurs, parallèles au grand axe.* C'est la traduction de la formule

$$y = \pm \frac{ab}{c}.$$

2. L'importance de la considération des conjointes réside dans le théorème suivant :

Dans la transformation par polaires réciproques relativement à un cercle, les éléments corrélatifs des foyers d'une conique sont les conjointes du centre du cercle directeur (centre de la transformation) et de la conique corrélative.

La démonstration de ce théorème est des plus simples. Les ombilics I et J étant situés sur la droite de l'infini, et les directions isotropes OI et OJ (O est le centre de la transformation) étant perpendiculaires à elles-mêmes, les ombilics I et J ont respectivement pour éléments corrélatifs les droites OI et OJ. Or, les foyers d'une conique K sont les points de rencontre réels des couples de tangentes menées à K par les ombilics I et J. Les éléments corrélatifs de ces foyers seront donc les cordes communes à la conique corrélative de K et au couple de droites OI et OJ, c'est-à-dire les conjointes du centre O de la transformation, et de la conique corrélative de K.

A titre de corollaire immédiat de ce théorème, on peut remarquer que, si l'un des foyers de la conique K coïncide avec le centre O de la transformation, l'une des conjointes du point O et de la conique corrélative étant rejetée à l'infini, cette conique corrélative est un cercle, résultat bien connu dont on pénètre ainsi la raison intime.

Le théorème précédent permettra de transformer les propriétés des foyers des coniques en propriétés de conjointes, et *vice versâ*. En particulier, on pourra considérer les systèmes de coniques ayant les mêmes cordes réelles communes avec un point donné, coniques qui pourront être dites *homoconjonctives* par rapport à ce point, et toutes leurs propriétés se déduiront corrélativement des propriétés bien connues des systèmes de coniques homofocales.

Mais, ici, nous nous attacherons surtout, c'est là le principal objet de cette Note, à faire voir comment le théorème précédent peut être utilisé pour déduire les propriétés focales des coniques des propriétés tout élémentaires de l'axe radical d'un cercle et d'un point.

3. Soient C un cercle, O un point, f l'axe radical de ce cercle et de ce point (droite équidistante du point O et de la polaire de ce point relativement au cercle C). Une transformation par polaires réciproques de centre O donne, comme courbe corrélative du cercle C, une conique K, qui est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que le point O est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la circonférence du cercle C. Mais, dans tous les cas, cette conique K a pour foyers le point O et le point F corrélatif de la droite f.

4. Joignons le point O à un point M pris sur le cercle C; la tangente en M au cercle C coupe la droite f au point N ; tirons ON et menons Oμ parallèlement à MN.

D'après une propriété fondamentale de l'axe radical f du point O et du cercle C, on a

$$NO = NM;$$

donc

$$\widehat{NOM} = \widehat{NMO} \quad \text{et} \quad \widehat{NOM} = \widehat{MO\mu} \text{ (1)}.$$

L'élément corrélatif du point M pris sur le cercle C est une tangente m à la conique K; celui de la droite f est le foyer F de la conique K, l'autre foyer étant au point O; celui de la tangente MN au cercle C est le point de contact P de la tangente m sur la conique K; ceux des points N et μ (ce dernier situé à l'infini dans la direction MN) sont les rayons vecteurs PF et PO. La transformation de la propriété précédente montre donc que l'angle de PF avec la tangente m est égal à l'angle de m avec PO. On obtient ainsi cette propriété classique :

La tangente en un point d'une conique est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui unissent le point de contact aux foyers de la conique.

5. Les polaires d'un point M, pris sur l'axe radical de deux cercles, relativement à ces deux cercles, se coupent sur leur axe radical, car elles sont elles-mêmes les axes radicaux du cercle de centre M orthogonal aux cercles donnés et de ces cercles. Lorsque l'un des cercles donnés se réduit à un point O, cette propriété devient : si la polaire, relativement à un cercle C, d'un

---

(1) Une transformation homographique permet de déduire de là le théorème suivant :

Les segments d'une tangente à une conique, compris entre le point de contact de cette tangente et ses intersections avec les conjointes d'un point par rapport à la conique, sont vus de ce point sous des angles égaux.

point M pris sur l'axe radical d'un point O et de ce cercle C coupe cet axe radical au point M', l'angle MOM' est droit. Transformant par polaires réciproques, on a ce théorème bien connu :

Le pôle d'une droite passant par le foyer F *d'une conique, relativement à cette conique, est sur la perpendiculaire élevée en* F *à cette droite;*

Ou bien :

La perpendiculaire menée par un foyer F *d'une conique au rayon vecteur d'un point* M *de cette conique coupe la tangente en* M *sur la directrice relative au foyer* F (1).

6. Tout cercle dont le centre M est sur la droite f et qui passe par le point O coupe orthogonalement le cercle C, c'est-à-dire qu'il passe par les points de contact des tangentes menées de M au cercle C. La transformation par polaires réciproques de cette propriété montre que si F et F' sont les foyers d'une conique K et que MM' soit une corde de la conique passant par le foyer F, la parabole qui a F' pour foyer et MM' pour directrice, est tangente aux tangentes menées à la conique K par les points M et M'.

En outre, si μ et μ' sont les points de contact de ces tangentes et de la parabole, les angles MF'μ et M'F'μ'

---

(1) On peut aussi remarquer, en observant que l'élément corrélatif du centre d'un cercle C est la directrice de la conique corrélative K, qui correspond au foyer confondu avec le centre O de la transformation, que cette propriété est également corrélative de celle-ci :

Toutes les normales à un cercle passent par le centre de ce cercle.

sont droits. Donc, d'après le théorème qui termine le n° 5, les points μ et μ' appartiennent à la directrice de la conique K relative au foyer F'. On est ainsi conduit à ce théorème qui ne nous semble pas avoir été déjà remarqué :

Une parabole qui a pour foyer un foyer F' *d'une conique* K *et pour directrice une droite quelconque passant par l'autre foyer* F *de la conique* K *et coupant cette conique aux points* M *et* M' *est tangente aux tangentes à la conique* K *menées par les points* M *et* M', *la corde de contact étant la directrice de la conique* K *relative au foyer* F'.

7. Soient f et f_1 les axes radicaux d'un point O et respectivement de deux cercles C et C_1. La perpendiculaire abaissée du point de rencontre de f et f_1 sur la ligne des centres C et C_1 est l'axe radical de ces deux cercles. La transformation par polaires réciproques, le point O étant toujours pris pour centre de la transformation, donne ce théorème qui nous semble également nouveau :

Si deux coniques ont en commun un foyer O, *leurs tangentes communes se coupent au point de rencontre de la droite qui joint les autres foyers* F *et* F_1 *et de la perpendiculaire élevée en* O *à la droite qui joint ce foyer au point de rencontre des directrices qui lui correspondent dans les deux coniques.*

8. Si t et t' sont les tangentes menées d'un point M à un cercle C, et que D soit un point pris sur la polaire du point M relativement au cercle C, la polaire d du point D passe par le point M, et les droites d et MD sont

conjuguées harmoniques par rapport aux droites t et t'.

Supposons alors que le point M se trouve sur l'axe radical f du point O et du cercle C, et que nous prenions pour point D le point de la polaire de M qui se trouve sur la polaire de O; la droite d se confond alors avec MO. Soient T et T′ les points de contact avec C des tangentes issues de M; puisque $MT = MT' = MO$, si par le point O nous élevons à OT et à OT′ les perpendiculaires ON et ON′ qui coupent MT et MT′ respectivement en N et N′, nous avons $TN = 2TM$, $T'N' = 2T'M$; par suite, la droite NN′ est symétrique de TT′ par rapport à M, et si cette droite coupe MD en E, OE est parallèle à f.

Cela posé, opérons une transformation par polaires réciproques de centre O. Au point M situé sur f correspond une droite passant par le foyer F de la conique K et coupant cette conique en deux points A et A′. Aux points N et N′ correspondent les normales à la conique K en A et A′, normales qui se coupent en B. Au point E correspond la parallèle à l'axe focal de la conique K, menée par le point B; si cette parallèle coupe AA′ au point C, le point C est dès lors corrélatif de la droite ME; mais nous venons de voir que la droite MD est conjuguée harmonique de MO par rapport aux tangentes MT et MT′; donc le point C est conjugué harmonique du point situé à l'infini sur AA′ par rapport aux points A et A′, c'est-à-dire que le point M est le milieu de AA′, et nous obtenons ce théorème connu :

Si par le point de rencontre des normales à une conique menées par les extrémités d'une corde focale, on mène une parallèle à l'axe focal de cette conique, cette droite passe par le milieu de la corde focale considérée.

9. Supposant toujours le point M situé sur l'axe radical f du point O et du cercle C, plaçons maintenant le point D à la rencontre de la polaire du point M relativement au cercle C et de la droite qui joint le centre de ce cercle au point O, c'est-à-dire au pôle de la droite f. La droite d coïncide alors avec la droite f, et nous voyons que MD est conjuguée harmonique de f par rapport aux tangentes au cercle C issues de M, ou, si ces tangentes coupent en H et en H' la parallèle à f menée par D, que D est le milieu de HH', et, par suite, que les angles HOD et DOH' sont égaux.

Transformons toujours par polaires réciproques :

Au pôle D de la droite f correspond la directrice de la conique K relative au foyer F. On a donc ce théorème connu :

Si la corde AA' *d'une conique passe par le foyer* F *de cette conique, les droites, qui joignent les extrémités* A *et* A' *de cette corde au point de rencontre de la directrice relative au foyer* F *et de l'axe focal, sont également inclinées sur cet axe.*

10. Considérons un cercle C de centre Ω, un point O et une droite d quelconque perpendiculaire à $O\Omega$. Joignons le point O à un point P mobile sur le cercle C; menons perpendiculairement à OP la droite OQ qui coupe d en Q, puis QR parallèle à la tangente PT menée en P en cercle C, c'est-à-dire perpendiculaire à $P\Omega$. Nous avons

$$\widehat{OQR} = \widehat{OP\Omega} = \theta, \qquad \widehat{OQH} = \widehat{PO\Omega} = \varphi.$$

Donc, si nous abaissons du point O sur QR la perpendiculaire OR, nous avons

$$OR = OQ \sin\theta = OH \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = OH \frac{O\Omega}{P\Omega},$$

et comme OH, OΩ et PΩ sont constants, OR est aussi constant; par suite, la droite QR enveloppe un cercle de centre O.

Transformons par polaires réciproques. Nous avons une conique K ayant un foyer au point O. Au point P correspond une tangente t à cette conique; à la droite d, un point Δ de l'axe focal; au point Q, la perpendiculaire p abaissée de Δ sur t; à la droite QR qui joint le point Q au point situé à l'infini sur la tangente PT au cercle C, le point de rencontre de la droite p et du vecteur qui joint le foyer O au point de contact de la tangente t et de la conique K. D'ailleurs le cercle de centre O enveloppé par QR a pour corrélatif également un cercle de centre O. On a donc ce théorème connu :

Le lieu du point de rencontre du rayon vecteur qui unit un point M *mobile sur une conique à l'un des foyers de cette conique et de la perpendiculaire abaissée d'un point* Δ *de l'axe focal sur la tangente au point* M *est un cercle ayant pour centre le foyer* O.

Si l'on prend pour point Δ le second foyer F de la conique, on voit, en considérant le point M dans une position infiniment voisine de l'un des sommets de l'axe focal, que le rayon du cercle correspondant (cercle directeur) est égal à la longueur de cet axe. Rapprochant ce résultat du théorème obtenu au n° 4, on en déduit la propriété des rayons vecteurs dans les coniques.

11. Nous donnerons encore un exemple remarquable de la méthode que nous indiquons ici.

Supposons que le cercle C soit variable, mais ait constamment avec le point O même axe radical f. Considérons en outre un point fixe quelconque D. L'axe radical des points D et O considérés comme cercles de rayon nul est la perpendiculaire élevée à DO en son milieu. Cette droite coupe f en un point K, et l'axe radical du point D et du cercle C passe constamment par le point K. Il en résulte que la polaire du point D relativement au cercle C passe constamment par le point D′ symétrique du point D par rapport au point K, point situé à la rencontre de DK et de la perpendiculaire élevée en O à OD.

Passons à la figure corrélative. Aux différents cercles C correspondent des coniques ayant toutes un foyer au point O et un foyer au point F, c'est-à-dire des coniques *homofocales*, et, si d est la droite corrélative du point D, nous voyons que les pôles de cette droite par rapport aux coniques du système sont situés sur une droite d', la corrélative du point D′. Le point K a pour élément corrélatif la droite qui joint le point F au symétrique du point O par rapport à la droite d. Cette droite coupe la droite d en un point M, et puisque l'angle DOD′ est droit, la droite d' est la perpendiculaire élevée en M à la droite d. De là ce théorème connu :

Les pôles d'une droite d relativement à un système de coniques homofocales sont situés sur la perpendiculaire menée à cette droite par le point où elle est coupée par la droite qui joint l'un des foyers au symétrique de l'autre par rapport à d.

Remarquant que la droite d est tangente au point M à une conique ayant pour foyers F et O, on peut énoncer encore ce théorème de la manière que voici :

Le lieu des pôles d'une droite d, relativement à un système de coniques homofocales, est la normale à celle de ces coniques qui touche la droite d menée par le point de contact de cette conique et de cette droite.

12. Nous nous bornerons aux exemples qui précèdent pour mettre en relief la fécondité de la méthode qui consiste à déduire les propriétés focales des coniques de la théorie des axes radicaux.

Pour terminer, nous ferons observer que réciproquement toute propriété des foyers conduit corrélativement à une propriété des conjointes d'un point et d'une conique, et, plus particulièrement, de l'axe radical d'un point et d'un cercle.

Exemple. — Prenons cette propriété connue : Soit MFM′ une corde focale de l'ellipse dont le grand axe est AA′; si l'on prolonge MA et M′A jusqu'à leurs points de rencontre Q et Q′ avec la directrice qui correspond au foyer F, l'angle QFQ′ est droit (1).

Appelons O le second foyer de la conique, et transformons par polaires réciproques en prenant le point O pour centre de la transformation. Nous obtenons ainsi ce théorème :

Soient f l'axe radical d'un point O *et d'un cercle* C, *et* P *le pôle de cet axe relativement au cercle* C. *Si les tangentes menées d'un point quelconque de f au cercle* C *coupent l'une des tangentes à ce cercle, parallèles à f, aux points* I *et* I′, *et que les droites* PI *et* PI′ *coupent la droite f aux points* H *et* H′, *l'angle* HOH′ *est droit.*

---

(1) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie,* t. II, 5e édition, p. 529, Ex. 916.