M. D'OCAGNE

Solution géométrique complète de la troisième partie du problème d'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 339-344

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__339_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE COMPLÈTE DE LA TROISIÈME PARTIE DU PROBLÈME D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Étant donnés un point O et quatre droites D, D', Δ, Δ' ne se rencontrant pas, on mène par le point O un plan quelconque qui coupe ces quatre droites aux points d, d', δ, δ'. Les droites dd', $\delta\delta'$ se rencontrent en un point M dont le lieu est une surface de troisième ordre (M). Il s'agit de déterminer les vingt-sept droites de la surface (M). Appelons D_0 la droite issue de O qui rencontre D et D', Δ_0 la droite issue de O qui rencontre Δ et Δ'.

Si l'on considère toutes les droites $\delta\delta'$ qui rencontrent D, on voit que cette dernière droite appartient à la surface; de même pour D', Δ et Δ'.

Si l'on considère toutes les droites $\delta\delta'$ qui rencontrent D_0, on voit que cette dernière droite appartient à la surface; de même pour Δ_0.

Nous allons voir que la connaissance des six droites D, D', Δ, Δ', D_0, Δ_0 entraîne immédiatement celle des vingt et une autres. Nous entendons par là qu'à l'aide de ces six droites on peut effectivement *construire* les vingt et une restantes, et non pas seulement se contenter d'indiquer des plans liés à ces droites et contenant de nouvelles droites de la surface sans déterminer autrement ces dernières.

Nous emploierons, pour faire cette détermination complète, la notation de M. Cremona, qui est la suivante :

Les vingt-sept droites, réelles ou imaginaires, de toute surface du troisième ordre peuvent être représentées par

$$\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
 & & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\
 & & & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\
 & & & & c_{45} & c_{46} \\
 & & & & & c_{56},
\end{array}$$

les relations de situation entre ces vingt-sept droites étant indiquées par leurs indices ainsi qu'il résulte de l'énoncé que voici :

Deux des vingt-sept droites se rencontrent lorsqu'elles appartiennent à l'un des groupes suivants :

1° *Une droite a et une droite b d'indices différents ;*

2° *Une droite a ou b et une droite c ayant un indice commun ;*

3° *Deux droites c n'ayant pas d'indice commun.*

Pour tous les autres groupements deux à deux des vingt-sept droites il n'y a pas rencontre.

On vérifie immédiatement, en prenant l'une quelconque des vingt-sept droites et appliquant l'énoncé précédent, que cette droite en rencontre dix autres.

Cela posé, nous constituerons, dans le cas qui nous occupe, les groupes numérotés en chiffres romains dont voici l'énumération :

I. Les quatre droites D, D′, Δ, Δ' qui appartiennent, comme nous venons de le voir, à la surface (M) et ne se rencontrent pas pourront être ainsi désignées (Énoncé, 3°) :

D	c_{12}
D′	c_{13}
Δ	c_{14}
Δ'	c_{15}

Total : 4 *droites*.

II. La droite D_0, qui rencontre à la fois c_{12} et c_{13}, ne peut être que a_1. b_1 (É., 2°), c_{45}, c_{46}, c_{56} (É., 3°). Mais elle ne doit rencontrer ni Δ, ni Δ', c'est-à-dire ni c_{14}, ni c_{15}. Or a_1 et b_1 rencontrent c_{14} et c_{15}, c_{46} rencontre c_{15}, et c_{56} rencontre c_{14}. La droite D_0 ne peut donc être que c_{45}. On voit de même que Δ_0 ne peut être que c_{23}. Ces deux droites c_{45} et c_{23} ont bien en commun un point qui est le point O.

On voit donc que l'on doit prendre pour

D_0	c_{45}
Δ_0	c_{23}

Total : 2 *droites*.

III. Les droites c_{13} et c_{45} déterminent un plan (É., 3°). Ce plan coupe les droites c_{14} et c_{15} en des points qui ne sont pas sur les deux précédentes, car c_{14} et c_{15}, qui ne se rencontrent pas, ne rencontrent pas non plus c_{13} et c_{45}. La droite qui joint ces deux points d'intersection coupe donc les quatre droites c_{13}, c_{45}, c_{14} et c_{15} en quatre points distincts. Elle appartient donc tout entière à la surface. Ce ne peut être ni une a, ni une b, car il faudrait que son indice appartînt à la fois aux quatre précédentes (É, 2°) qui n'ont pas toutes ensemble un indice commun. C'est donc une c, et comme elle ne peut avoir aucun des indices 1, 3, 4, 5, c'est c_{26}.

Ainsi donc :

La droite joignant les points d'intersection de

c_{14} et c_{15} avec le plan $(c_{13}c_{45})$ est c_{26}.

De même :

La droite joignant les points d'intersection de

c_{14}	et	c_{15}	avec le plan	$(c_{12}c_{45})$	est	c_{36}
c_{12}	»	c_{13}	»	$(c_{15}c_{23})$	»	c_{46}
c_{12}	»	c_{13}	»	$(c_{14}c_{23})$	»	c_{56}

Total : 4 *droites*.

IV. Les droites c_{13} et c_{56} d'une part, c_{15} et c_{36} de l'autre déterminent deux plans dont la droite d'intersection, qui coupe ces quatre droites en quatre points distincts, est tout entière sur la surface (M). En reprenant le même raisonnement qu'au n° III, on voit que cette droite ne peut être que c_{24}. On trouve ainsi que

les plans	$(c_{13}c_{56})$	et	$(c_{15}c_{36})$	se coupent suivant	c_{24}
»	$(c_{13}c_{46})$	»	$(c_{14}c_{36})$	»	c_{25}
»	$(c_{12}c_{56})$	»	$(c_{13}c_{26})$	»	c_{34}
»	$(c_{12}c_{46})$	»	$(c_{15}c_{26})$	»	c_{35}
»	$(c_{24}c_{35})$	»	$(c_{25}c_{34})$	»	c_{16}

Total : 5 *droites*.

Remarque. — Les onze droites déduites des quatre qui étaient données et du point O, se construisant toutes linéairement, sont nécessairement réelles.

Donc, *les quinze droites c de la surface* (M) *sont toutes réelles*.

V. Il existe deux droites, réelles ou imaginaires, rencontrant les quatre droites D, D′, Δ, Δ′, c'est-à-dire c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}. Ces deux droites seront a_1 et b_1 (E, 2°).

Total : *deux droites.*

VI. En reprenant le même raisonnement qu'au n° III, et s'appuyant sur les deux premières parties de l'énoncé au lieu des deux dernières, on voit que :

La droite joignant les points d'intersection de :

c_{23}	et	c_{26}	avec le plan	$(b_1 c_{12})$	est	a_2,
c_{23}	»	c_{36}	»	$(b_1 c_{13})$	»	a_3,
c_{45}	»	c_{46}	»	$(b_1 c_{14})$	»	a_4,
c_{45}	»	c_{56}	»	$(b_1 c_{15})$	»	a_5,
c_{26}	»	c_{36}	»	$(b_1 c_{16})$	»	a_6,
c_{23}	»	c_{26}	»	$(a_1 c_{12})$	»	b_2,
c_{23}	»	c_{36}	»	$(a_1 c_{13})$	»	b_3,
c_{45}	»	c_{46}	»	$(a_1 c_{14})$	»	b_4,
c_{45}	»	c_{56}	»	$(a_1 c_{15})$	»	b_5,
c_{26}	»	c_{36}	»	$(a_1 c_{16})$	»	b_6.

Total : *dix droites.*

Remarque. — Ces dix dernières droites se déduisant linéairement de a_1 et b_1 sont réelles lorsque ces deux dernières le sont.

D'autre part, nous aurions pu, au lieu de partir du couple (a_1, b_1), partir de tout autre couple (a_2, b_2), (a_3, b_3), ..., et nous aurions de même obtenu les dix droites restantes par des constructions linéaires. Il en résulte que, si l'un quelconque des six couples (a, b) est imaginaire, les cinq autres le sont aussi. Donc, *les douze droites a et b sont toutes à la fois réelles ou imaginaires.*

En résumé, nous avons successivement déterminé $4 + 2 + 4 + 5 + 2 + 10 = 27$ droites de la surface (M), et, grâce à l'emploi de la notation de M. Cremona, nous sommes sûrs que ces vingt-sept droites sont distinctes. Nous avons donc *toutes les droites* de la surface.

Nous voyons, en outre, que, suivant que les deux droites qui rencontrent D, D′, Δ, Δ' sont réelles ou imaginaires, la surface a vingt-sept ou quinze droites réelles et nous avons le moyen de déduire de ces six droites les vingt et une autres par des constructions linéaires, c'est-à-dire susceptibles de se traduire par une épure.