NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. TARRY

Sur les exponentielles imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 269-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__269_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LES EXPONENTIELLES IMAGINAIRES;

PAR M. G. TARRY.

On sait que les nombres qui mesurent les angles sont des logarithmes dont la base est $e^{\sqrt{-1}}$ ou ε. La figure géométrique formée par deux droites qui se coupent représente une infinité d'angles égaux au point de vue de leur représentation matérielle, mais non identiques puisqu'ils diffèrent de multiples de 2π. Pareillement, la figure algébrique $a + b\sqrt{-1}$ représente l'infinité des nombres

$$\ldots,\quad \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}-2\pi},\quad \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}},\quad \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}+2\pi},\quad \ldots,$$

égaux au point de vue de la représentation matérielle algébrique, mais non identiques, puisque les exposants diffèrent de multiples de 2π.

Ce rapprochement entre les angles et les exponentielles met en lumière cette vérité d'apparence paradoxale : deux nombres égaux élevés à des puissances égales peuvent donner deux nombres inégaux, et réciproquement deux nombres inégaux élevés à des puissances égales peuvent donner deux nombres égaux. Ainsi les nombres égaux $\varepsilon^{2\pi}$, $\varepsilon^{4\pi}$ élevés à la puissance $\sqrt{-1}$ donnent les nombres inégaux $\varepsilon^{2\pi\sqrt{-1}}$, $\varepsilon^{4\pi\sqrt{-1}}$, et réciproquement les nombres inégaux $\varepsilon^{2\pi\sqrt{-1}}$, $\varepsilon^{4\pi\sqrt{-1}}$ élevés à la puissance $-\sqrt{-1}$ donnent les nombres égaux $\varepsilon^{2\pi}$, $\varepsilon^{4\pi}$. De même, si l'on élève à la puissance $\frac{1}{2}$ les nombres égaux $(+1)^2$ et $(-1)^2$, on obtient les nombres inégaux $+1$ et -1.

Mais deux nombres égaux et identiques, élevés à des puissances égales, donnent toujours deux nombres égaux et identiques, puisqu'on a identiquement

$$\left(\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}+2\lambda\pi}\right)^{m+n\sqrt{-1}} = \varepsilon^{(\alpha+\beta\sqrt{-1}+2\lambda\pi)(m+n\sqrt{-1})}.$$

L'exposant $m+n\sqrt{-1}$ représentant une infinité de nombres égaux et non identiques, on voit qu'on a admis implicitement le *postulatum* suivant :

Deux nombres identiques élevés à des puissances égales et non identiques donnent deux nombres identiques.

Deux nombres identiques, soumis à des opérations non identiques, ne pouvant donner des résultats absolument identiques, il demeure sous-entendu que les nombres obtenus sont considérés comme identiques au point de vue seulement de la représentation algébrique de la forme $\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$. Ces nombres diffèrent nécessairement, mais ils se confondent dans cette représentation algébrique, comme deux nombres de la forme $\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$ dont les exposants diffèrent de 2π se confondent dans la représentation $a+b\sqrt{-1}$, ou comme deux angles qui diffèrent de 2π se confondent dans la représentation géométrique.

En résumé, si l'on veut éviter l'introduction en Algèbre d'une *nouvelle espèce de quantité imaginaire*, il faut admettre que les nombres

$$\left(\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right)^{\left(\varepsilon^{\gamma+\delta\sqrt{-1}}\right)} \quad \text{et} \quad \left(\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right)^{\left(\varepsilon^{\gamma+\delta\sqrt{-1}+2\pi}\right)}$$

sont égaux au point de vue de la représentation sous la forme $\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$.

Cela accepté, aucune difficulté ne peut se présenter dans le calcul des exponentielles. Les contradictions qu'on a cru rencontrer doivent être attribuées à des raisonnements inexacts ou à des erreurs de calcul.

Il convient de signaler ici une faute de calcul commise en 1876 par M. Vallès, et qui ne paraît pas avoir été signalée, car elle a été répétée en 1892 par M. Mouchot (*Nouvelles bases de la Géométrie supérieure*, p. 147).

On lit dans l'Ouvrage de M. Vallès *Sur les formes imaginaires en Algèbre* (3e partie, p. 40) :

« Dans la formule d'Euler

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

si l'on élève les deux membres à la puissance $\sqrt{-1}$, il viendra

$$e^{-x} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{\sqrt{-1}},$$

égalité qui, en faisant $x = \frac{\pi}{2}$, se réduit à

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

» Élevons maintenant les deux termes de la formule d'Euler à la puissance $-\sqrt{-1}$, il viendra

$$e^{x} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{-\sqrt{-1}} = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^{\sqrt{-1}},$$

égalité qui, si l'on suppose que x devient $\frac{\pi}{2}$, donne

$$e^{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

» Or, cette valeur de $-\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ ajoutée avec celle de $+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ donne

$$e^{+\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{\pi} = -1,$$

ce qu'aucun géomètre à coup sûr ne sera disposé à admettre. »

Le résultat auquel arrive M. Vallès est dû à l'omission d'une parenthèse. En effet, si dans l'égalité

$$e^x = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^{\sqrt{-1}},$$

on suppose que x devient $\frac{\pi}{2}$, on a

$$e^{\frac{\pi}{2}} = (-\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}},$$

et cette valeur ajoutée à celle de $+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ ne donne plus o.

On éviterait bien des confusions si l'on adoptait une notation spéciale pour distinguer l'identité de la simple égalité. Il est regrettable que le même signe $=$ figure l'égalité dans les relations

$$1.\varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \varepsilon^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}, \qquad a(-1)^2 = a,$$

et l'identité dans les relations

$$\sqrt[4]{a}\sqrt{-1} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a(-1)^2} = \sqrt[4]{a}.$$