Nouvelles annales de mathématiques

G. Leinekugel

Généralisation et solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 146-151

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__146_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

GÉNÉRALISATION ET SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1889;

PAR M. G. LEINEKUGEL.

On considère, dans un plan, une parabole (P) *et une ellipse* (E) *représentées respectivement par les deux équations*

$$(\mathrm{P})\quad y^2 - 8x = 0, \qquad (\mathrm{E})\quad y^2 + 4x^2 - 4 = 0,$$

et un point M *de coordonnées* (α, β). *On demande de trouver sur la parabole* (P) *un point* Q *tel que le pôle de la droite* MQ, *par rapport à l'ellipse* (E), *soit situé sur la tangente en* Q *à la parabole. Trouver le nombre de solutions réelles du problème, suivant la position du point* M *dans le plan.*

Solution géométrique. — Considérons deux coniques quelconques (E) et (P) et un point M du plan fixe; il s'agit de trouver un point Q sur l'une des coniques, (P) par exemple, tel que le pôle de MQ par rapport à l'autre conique (E) soit sur la tangente en Q à (P).

Menons par M une droite quelconque MAB, son pôle m par rapport à (E) décrit une droite Δ. Si nous considérons la polaire de m par rapport à (P), elle passera par un point M′ fixe, pôle de Δ par rapport à (P), et rencontrera MAB en Q dont le lieu (Q), quand la sécante pivotera autour de M, contiendra évidemment les points cherchés.

Or, d'après la construction du point Q, il résulte qu'à une droite MAB correspond une et une seule droite M′Q et inversement. Les rayons MQ et M′Q sont donc homographiques, le lieu de Q est, par suite, une conique passant par les points M, M′ sommets des deux faisceaux. Cette conique passe aussi par les trois sommets R, S, T du triangle autopolaire commun aux deux coniques (E) et (P). En effet, soit S un des sommets, la droite MS a pour pôle, par rapport à (E), le point de rencontre de RT et de Δ, et ce point a pour polaire, par rapport à (P), une droite passant par M′, puis par le pôle de RT, par rapport à (P), c'est-à-dire par S.

Cette conique est bien déterminée puisqu'on en connaît cinq points M, M′, R, S et T. Les quatre points communs à cette conique (Q) et à la conique (P) sont les points répondant à la question. Quelle que soit la position du point M dans le plan, on peut dire qu'il y a toujours deux points réels, car dans le triangle RST, il y a toujours un des sommets intérieurs à (P).

Solution analytique. — Désignons les équations de (P) et de (E) par

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{P}) \qquad f(x, y, z) = 0, \\
&(\mathrm{E}) \qquad \varphi(x, y, z) = 0,
\end{aligned}
$$

et par X, Y, Z les coordonnées d'un point Q du lieu sur P

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0; \tag{1}$$

l'équation de la tangente en ce point est

$$x f'_{\mathrm{X}} + y f'_{\mathrm{Y}} + z f'_{\mathrm{Z}} = 0.$$

Elle rencontre la polaire Δ de M par rapport à (E) au point $m(x, y)$ défini par les deux équations suivantes

$$
\begin{aligned}
x f'_{\mathrm{X}} + y f'_{\mathrm{Y}} + z f'_{\mathrm{Z}} &= 0, \\
x \varphi'_{\alpha} + y \varphi'_{\beta} + z \varphi'_{\gamma} &= 0.
\end{aligned}
$$

Pour que le point Q satisfasse aux conditions de l'énoncé, il faut que la polaire de ce point m par rapport à (E) passe en Q, ce qui donne comme condition

$$x\varphi'_X + y\varphi'_Y + z\varphi'_Z = 0.$$

L'élimination de x, y, z donne comme relation à laquelle doivent satisfaire des coordonnées de Q

$$(2)\qquad\qquad (Q)\begin{vmatrix} f'_X & f'_Y & f'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \\ \varphi'_\alpha & \varphi'_\beta & \varphi'_\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, où l'on regarde X, Y, Z comme les coordonnées courantes, représente une conique (Q), passant par M, car en substituant à X, Y, Z les coordonnées α, β, γ, le déterminant a deux lignes identiques. Elle passe également par le pôle M' de Δ par rapport à (P), dont les coordonnées sont définies par les relations

$$\frac{f'_x}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_y}{\varphi'_\beta} = \frac{f'_z}{\varphi'_\gamma}.$$

L'équation de (Q) pouvant s'écrire

$$\begin{vmatrix} f'_X + \lambda\varphi'_X & f'_Y + \lambda\varphi'_Y & f'_Z + \lambda\varphi'_Z \\ \varphi'_X & \varphi'_Y & \varphi'_Z \\ \varphi'_\alpha & \varphi'_\beta & \varphi'_\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

on voit que, les trois sommets du triangle autopolaire commun aux coniques (P), (E) vérifiant les trois équations suivantes :

$$f'_x + \lambda\varphi'_x = 0,$$
$$f'_y + \lambda\varphi'_y = 0,$$
$$f'_z + \lambda\varphi'_z = 0,$$

ces trois points appartiennent à cette conique (Q).

Il y a donc toujours deux points réels d'intersection des coniques (Q) et (P); pour que les deux autres points soient réels, il faut que les trois racines de l'équation en λ, relative aux coniques (Q) et (P), ait ses trois racines réelles.

Si nous supposons que les équations de (P) et de (E) soient rapportées au triangle autopolaire commun à ces deux coniques

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$
$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0,$$

l'équation de Q devient

$$P = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ A & A' & A'' \\ A\dfrac{\alpha}{x} & A'\dfrac{\beta}{y} & A''\dfrac{\gamma}{z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(Q) \quad A\frac{\alpha}{x}(A''a' - a''A') + A'\frac{\beta}{y}(Aa'' - A''a) + A''\frac{\gamma}{z}(A'a - a'A) = 0.$$

L'équation en λ des deux coniques (P) et (Q)

$$f + 2\lambda Q = 0$$

est

$$\begin{aligned} &2\lambda^3\alpha\beta\gamma AA'A''(A''a' - a''A')(Aa'' - A''a)(A'a - a'A) \\ &-\lambda^2[\alpha^2 aA^2(A''a' - a''A')^2 + \beta^2 a'A'^2(Aa'' - A''a)^2 + \gamma^2 a''A''^2(A'a - Aa')^2] \\ &- aa'a'' = 0; \end{aligned}$$

la condition de réalité des racines de cette équation est

$$(C)\ \left\{\begin{aligned} &27\alpha^2\beta^2\gamma^2 aa'a''A^2A'^2A''^2(A''a' - a''A')^2(Aa'' - A''a)^2(A'a - a'A)^2 \\ &- [\alpha^2 aA^2(A''a' - a''A')^2 + \beta^2 a'A'^2(Aa'' - A''a)^2 + \gamma^2 a''A''^2(A'a - Aa')^2]^3 \leqq 0. \end{aligned}\right.$$

En égalant ce premier membre à zéro et en considérant α, β, γ comme des coordonnées courantes, nous aurons l'équation de la courbe (C) partageant le plan en régions; lorsque le point M sera dans les régions positives, deux points d'intersection de (P) et de (Q) seront réels, dans les autres, tous les quatre seront réels. Cette courbe du sixième ordre admet six points de rebroussement situés sur les côtés du triangle et sur la conique

$$\alpha^2 a A^2 (A'' a' - a'' A')^2 + \beta^2 a' A'^2 (A a'' - A'' a)^2 + \gamma^2 a'' A''^2 (A' a - A a')^2 = 0,$$

qui admet le triangle de référence comme triangle autopolaire. Les tangentes de rebroussement sont les trois côtés du triangle. Parmi ces six points, quatre seulement sont toujours réels. Cette courbe (C) est encore le lieu des points M pour lesquels les coniques (Q) correspondantes sont tangentes à (P).

Pour appliquer ce qui précède au cas particulier de l'énoncé, nous remarquons que les équations de (P) et de (E) peuvent s'écrire

$$(\mathrm{P}) \qquad y^2 + 2i(x+i)^2 - 2i(x-i)^2 = 0,$$

$$(\mathrm{E}) \qquad y^2 + 2(x+i)^2 + 2(x-i)^2 = 0,$$

ce qui revient à supposer, dans les équations de (Q) et de (C),

$$\begin{array}{lll} \alpha = x + i, & a = 2i, & A = 2, \\ \beta = y, & a' = 1, & A' = 1, \\ \gamma = x - i, & a'' = -2i, & A'' = 2: \end{array}$$

l'équation de (Q) devient

$$\beta x^2 - xy(1+\alpha) + y(\alpha - 1) + \beta = 0,$$

celle de (C)

$$27y^2(x^2+1)^2 = (2x^2 + y^2 - 2)^3,$$

symétrique par rapport aux deux axes; il n'y a ici que deux points de rebroussement réels, car deux des côtés du triangle autopolaire commun aux coniques (P) et (E) sont imaginaires. Les termes du sixième degré sont

$$27y^2x^4 = (2x^2 + y^2)^3.$$

Posons

$$\frac{y}{x} = m;$$

l'équation aux coefficients angulaires des directions asymptotiques est alors

$$(m^2+2)^3-27m^2=0,$$

ou

$$(m^2-1)[(m^2-1)^2+3(m^2-1)+3(m^2-1)3^2-3^3]=0,$$

ou

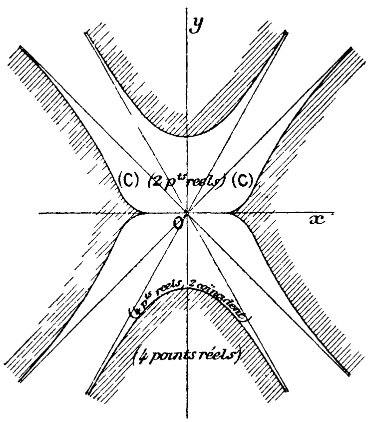
$$m^2-1=0,$$

$$(m^2-1)^2+30(m^2-1)-27=0,$$

la seconde équation en (m^2-1) admettant une racine positive; la courbe (C) admet quatre directions asymptotiques réelles et simples. Comme l'origine est centre de la courbe, les asymptotes passent par ce point. Elle rencontre l'axe des y en deux points seulement, car l'équation

$$27y^2=(y^2-2)^3$$

en y^2 admet une seule racine positive. La courbe (C) présente donc la forme ci-dessous et les régions portant



des hachures sont celles où doit se trouver le point M pour qu'il y ait quatre points réels répondant à la question.