NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. BARBARIN

Sur l'enveloppe d'un plan

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 99-100

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__99_0>

SUR L'ENVELOPPE D'UN PLAN;

PAR M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Toulon.

La ligne droite mobile AB, qui dans le plan de l'angle fixe AOB découpe un triangle AOB d'aire constante, enveloppe une hyperbole dont OA et OB sont les asymptotes.

Ce théorème s'étend sans difficulté à l'espace.

Les plans qui découpent dans un cône du second degré des volumes limités de grandeur constante sont tangents à un hyperboloïde à deux nappes, asymptote à ce cône.

Ce théorème avait-il été remarqué jusqu'à ce jour? Au surplus, en voici une démonstration simple.

Le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ (coordonnées rectangulaires) coupe le cône S,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

suivant une ellipse qui a pour aire

$$\pi \frac{\delta^2 abc}{-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}};$$

la distance du sommet au plan de la section est $\dfrac{\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$; si l'on représente par $\frac{1}{3}\pi k^3$ le volume constant, on a donc

$$k^3 = \frac{\delta^3 abc}{(-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$\delta = \frac{k}{\sqrt[3]{abc}} \sqrt{-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2}$$

le plan sécant enveloppe donc l'hyperboloïde à deux nappes,

$$\frac{x^2}{\frac{a^2k^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}} + \frac{y^2}{\frac{-b^2k^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}} + \frac{z^2}{\frac{c^2k^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}} = 1,$$

asymptote au cône proposé. La réciproque est vraie.