NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN LÉVY

Conférence faite aux élèves de l'École polytechnique (cours de M. Jordan), sur les « changements de variables »

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 5-22

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

CONFÉRENCE FAITE AUX ÉLÈVES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (COURS DE M. JORDAN), SUR LES « CHANGEMENTS DE VARIABLES »;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

Le théorème dont je ferai surtout des applications est le suivant, démontré dans le Cours :

Si, par un procédé quelconque, on a trouvé une identité de la forme

$$(1)\qquad df(x, y) = A\,dx + B\,dy,$$

df, dx, dy étant des différentielles, on a identiquement

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

J'y ajouterai le théorème suivant qui se démontre de même :

Si, par un procédé quelconque, on a trouvé entre des différentielles premières et secondes une identité de la forme

$$(2)\quad d^2u = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 + D\,d^2x + E\,d^2y,$$

on peut assurer que

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{d^2 u}{dx\, dy}, \qquad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$D = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad E = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pour démontrer ce dernier théorème, je remarque qu'on a toujours

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} d^2 u = {} & \frac{d^2 u}{dx^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dy^2 \\ & + \frac{\partial u}{\partial x}\, d^2 x + \frac{\partial u}{\partial y}\, d^2 y, \end{aligned} \right.$$

et je donne d'abord aux variables des accroissements tels qu'on ait

$$dx = \lambda\, dy, \qquad d^2 y = 0, \qquad \text{d'où} \qquad d^2 x = 0;$$

l'identité des deux valeurs de $d^2 u$ exige alors qu'on ait, quel que soit le paramètre λ,

$$\left(A - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \lambda^2 + 2\left(B - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, dy}\right) \lambda + \left(C - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,$$

ce qui entraîne

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \qquad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Choisissons maintenant des accroissements tels que

$$dx = \lambda\, dy$$

sans qu'on ait $d^2 y = 0$.

La même identité entre les deux formes du $d^2 u$ donnera

$$\left(D - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \lambda + E - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

d'où, puisque λ est arbitraire,

$$D = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad E = \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Exemple (1). — *Intégrer l'équation aux dérivées partielles des fonctions homogènes*

$$mu = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Si l'intégrale est toujours une fonction homogène, on le reconnaîtra plus facilement en prenant comme nouvelles variables x, $Y = \frac{y}{x}$, $Z = \frac{z}{x}$.

Proposons-nous d'obtenir une relation de la forme

$$du = A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

en partant d'une égalité de même nature où figurent les dérivées de u par rapport aux nouvelles variables. Cette dernière égalité est évidemment

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial Y}\,dY + \frac{\partial u}{\partial Z}\,dZ,$$

en désignant par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ la dérivée partielle de u par rapport à x dans ce nouveau système pour la distinguer de celle, $\frac{\partial u}{\partial x}$, qui figure dans l'équation donnée.

Or

$$dY = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \qquad dZ = \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2},$$

donc

$$du = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Z}\right]dx + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial Y}\,dY + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial Z}\,dZ.$$

---

(1) Cet exemple et le suivant sont empruntés au Cours d'Analyse de M. Bertrand, fait aux élèves de l'École Polytechnique.

On déduit de là, en appliquant le théorème du début,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Z}},$$

et l'équation différentielle devient

$$mu = x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ou

$$\frac{\partial \log u}{\partial x} = \frac{m}{x}.$$

On peut l'intégrer immédiatement

$$\log u = m \log x + \log f(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$$

ou

$$u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

L'intégrale est donc bien la fonction homogène la plus générale du degré m d'homogénéité.

Remarque. — Insistons de nouveau sur ce fait que la dérivée partielle d'une même fonction par rapport à une même variable a des valeurs différentes lorsqu'on prend pour les autres variables des systèmes différents de variables. La chose est évidente; il suffit de l'avoir signalée.

Autre exemple (portant sur des différentielles du second ordre). — On voit facilement que l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées à plan directeur est

(1) $$p^2 t - 2pqs + q^2 r = 0,$$

lorsqu'on prend pour plan directeur le plan xOy. p, q, r, s, t représentent respectivement $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Pour obtenir cette équation, il suffirait d'éliminer les fonctions arbitraires dans l'équation de ces surfaces,

$$x\varphi(z) + y\psi(z) = 1. \tag{2}$$

Nous nous proposons de retrouver l'équation (2) en partant de l'équation (1). La forme de l'équation (2), linéaire en x et y, montre que les dérivées seraient plus simples si l'on prenait l'une de ces deux quantités comme fonction. Prenons y, et soient x et z les nouvelles variables; d'après la méthode indiquée au début de la Conférence, nous devons, pour calculer p, q, r, s, t en fonction des nouvelles dérivées, nous efforcer de trouver une relation de la forme

$$d^2 z = \mathrm{A}\,dx^2 + 2\mathrm{B}\,dx\,dy + \mathrm{C}\,dy^2 + \mathrm{D}\,d^2 x + \mathrm{E}\,d^2 y$$

en partant d'une identité qui contient ces nouvelles dérivées. L'identité en question est évidemment

$$d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dz + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\,dz^2 + \frac{\partial y}{\partial x}\,d^2 x + \frac{\partial y}{\partial z}\,d^2 z.$$

On en tire immédiatement

$$\begin{aligned} d^2 z = &- \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} : \frac{\partial y}{\partial z}\right) dx^2 - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} : \frac{\partial y}{\partial z}\right) dz^2 \\ &- 2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y} : \frac{\partial y}{\partial z}\right) dx\,dz \\ &- \left(\frac{\partial y}{\partial x} : \frac{\partial y}{\partial z}\right) d^2 x + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{-1} d^2 y. \end{aligned}$$

Remplaçons-y dz par sa valeur $p\,dx + q\,dy$ et ordonnons par rapport à dx, dy, $d^2 x$, $d^2 y$, nous aurons une égalité de la forme demandée et, par suite, nous obtenons les valeurs

$$p = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}},$$

$$q = \frac{1}{\dfrac{\partial y}{\partial z}},$$

$$r = -\frac{p^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2p\dfrac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial z} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}},$$

$$t = -\frac{q^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}};$$

$$s = -q\,\frac{p\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial z}}{\dfrac{\partial y}{\partial z}},$$

et il faut encore remplacer p et q par leurs valeurs dans r, s, t. Il n'y a plus qu'à substituer dans l'équation (1) qui devient ainsi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

d'où

$$y = \mathrm{A}x + \mathrm{B},$$

A et B étant des fonctions de z. C'est bien la forme (2).

Remarque. — J'ai tenu à donner un calcul complet comme application du théorème général, mais il est clair qu'ici il valait mieux calculer simplement $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, puisqu'on avait prévu que cette dérivée serait nulle. Voici comment on peut y parvenir.

Dans l'équation de la surface

$$z = f(x, y).$$

concevons qu'on ait remplacé y par sa valeur tirée de cette même équation ; nous obtenons alors une identité et les dérivées des deux membres, par rapport à x, doivent être égales

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},$$

ou

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}.$$

On a alors

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d\frac{\partial y}{\partial x}}{dx} = \frac{p\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) - q\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{q^2}.$$

$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$ contient x de deux manières, explicitement et par l'intermédiaire de y : donc

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = s - t\frac{p}{q}.$$

De même,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = r - s\frac{p}{q}.$$

On a donc finalement

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-p^2 t + 2pqs - q^2 r}{q^3},$$

et cette expression est nulle en vertu de l'équation (1).

Dans les exemples suivants, les changements de variables seront plus compliqués : les nouvelles variables dépendront non seulement des anciennes, mais encore des dérivées de la fonction par rapport à ces variables.

Transformation de Legendre. — Cette transformation consiste à remplacer les variables x, y et la fonction z par les nouvelles variables X, Y, Z, dont voici la définition

$$(1)\qquad X = \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad Y = \frac{\partial z}{\partial y} = q, \qquad Z = px + qy - z.$$

Je me propose de calculer les dérivées premières et secondes de la nouvelle fonction Z par rapport aux nouvelles variables.

1° *Dérivées premières de Z.* — D'après la méthode indiquée, il faut chercher une relation de la forme

$$dZ = P\,dX + Q\,dY,$$

et l'on aura alors

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

Or la troisième équation (1) différentiée donne immédiatement

$$dZ = p\,dx + q\,dy - dz + x\,dp + y\,dq,$$

ou, en tenant compte des autres équations (1) et de ce que les trois premiers termes de la dernière égalité disparaissent en vertu de l'égalité qui définit p et q $(dz = p\,dx + q\,dy)$,

$$dZ = x\,dX + y\,dY.$$

Donc

$$(2)\qquad P = x, \qquad Q = y.$$

2° *Dérivées secondes de Z.*

$$R = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X}, \qquad S = \frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial Q}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{\partial y}{\partial X},$$

$$T = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = \frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{\partial y}{\partial Y}.$$

Nous avons donc à calculer les dérivées de x et y par rapport aux nouvelles variables, c'est-à-dire à trouver des équations de la forme

$$dx = A\ dX + B\ dY,$$
$$dy = A'\, dX + B'\, dY.$$

Or r, s, t sont définies par les identités suivantes

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

qui peuvent s'écrire

$$dX = r\,dx + s\,dy,$$
$$dY = s\,dx + t\,dy.$$

On en tire

$$dx = \frac{t}{rt - s^2}\,dX - \frac{s}{rt - s^2}\,dY,$$

$$dy = \frac{-s}{rt - s^2}\,dX + \frac{r}{rt - s^2}\,dY.$$

Donc

$$\frac{\partial x}{\partial X} = R = \frac{t}{rt - s^2},$$

$$(3) \qquad S = \frac{-s}{rt - s^2},$$

$$T = \frac{r}{rt - s^2}.$$

Remarque. — Les anciennes variables s'obtiennent en fonction des nouvelles par des formules analogues

$$x = P, \qquad y = Q, \qquad z = PX + QY - Z,$$
$$p = X, \qquad q = Y,$$
$$r = \frac{T}{RT - S^2}, \qquad s = \frac{-S}{RT - S^2}, \qquad t = \frac{R}{RT - S^2}.$$

Interprétation géométrique. — *La transformation de Legendre revient à remplacer une surface par sa polaire réciproque par rapport à un certain paraboloïde.*

Soit, en effet,

$$z = f(x, y)$$

l'équation d'une surface, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, et soit

$$x^2 + y^2 = 2z$$

celle d'un paraboloïde. Cherchons la polaire réciproque de la surface par rapport au paraboloïde : un point de cette polaire réciproque ayant pour coordonnées X, Y, Z, son plan polaire par rapport au paraboloïde,

$$Xx + Yy - z - Z = 0,$$

doit se confondre avec le plan tangent à la surface au point x_0, y_0, z_0,

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0).$$

On a donc

$$\frac{X}{p_0} = \frac{Y}{q_0} = 1 - \frac{Z}{p_0 x_0 + q_0 y_0 - z_0},$$

ou

$$X = p_0, \qquad Y = q_0, \qquad Z = p_0 x_0 + q_0 y_0 - z_0 ;$$

ce sont les formules de Legendre.

Transformations de contact. — Les formules que nous venons de donner ont un caractère remarquable : elles permettent d'exprimer non seulement X, Y, Z, mais encore les dérivées $P = \frac{\partial Z}{\partial X}$, $Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$ en fonction de x, y, z, p, q. De pareilles transformations s'appellent des *transformations de contact*. Il est facile de voir que cela n'est pas possible, en général.

Soient, en effet, les trois formules dont la dernière résulte des deux autres,

$$(1)\qquad \begin{cases} X = f(x, y, z, p, q), \\ Y = f_1(x, y, z, p, q), \\ Z = f_2(x, y, z, p, q). \end{cases}$$

Pour avoir P et Q, cherchons une relation de la forme

$$\partial Z = A\, dX + B\, dY,$$

et pour cela différentions les équations (α) :

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} dX &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{dy}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp + \frac{\partial f}{\partial q}\,dq,\\ dY &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy + \frac{df_1}{\partial z}\,dz + \frac{df_1}{\partial p}\,dp + \frac{df_1}{\partial q}\,dq,\\ dZ &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}\,dz + \frac{df_2}{\partial p}\,dp + \frac{\partial f_2}{\partial q}\,dq\,: \end{aligned}\right.$$

comme

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy,\\ dp &= r\,dx + s\,dy,\\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}$$

en portant ces valeurs dans les équations (β), on pourra éliminer dx, dy et le résultat de l'élimination sera évidemment de la forme

$$dZ = A\,dX + B\,dY.$$

Mais A et B, et par suite P et Q, contiendront r, s, t, ce qui démontre le théorème.

La transformation de Legendre jouit donc d'une propriété spéciale. Géométriquement voici ce que cela veut dire : p, q et -1 sont, comme on l'a vu, proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au point x, y, z; de même P, Q, -1 sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au point X, Y, Z. Les transformations de contact sont donc celles qui font dépendre les points et plans tangents de la nouvelle surface exclusivement de la connaissance des points et plans tangents de la première surface.

C'est bien une propriété de la transformation par polaires réciproques; c'est aussi, évidemment, une propriété de toutes les transformations qui font correspondre les deux surfaces points par points (inversion, homographie); car, à trois points infiniment voisins qui déterminent le plan tangent à la première surface correspondent trois points infiniment voisins déterminant le plan tangent à la deuxième surface.

La correspondance entre une surface et sa podaire est encore une transformation de contact.

Soit, en effet,

$$z = f(x, y)$$

l'équation d'une surface,

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$$

l'équation de son plan tangent au point $M(x_0, y_0, z_0)$, et cherchons la podaire par rapport à l'origine O. La perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan aura pour équations

$$\frac{x}{p_0} = \frac{y}{q_0} = \frac{z}{-1}.$$

Les coordonnées du point $\mu(X, Y, Z)$ de la podaire seront, en effaçant les indices zéro, données par les équations

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} X - pZ = 0, \\ Y + qZ = 0, \\ Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \end{cases}$$

Calculons maintenant P et Q, et, pour cela, différentions les trois équations précédentes,

$$dX + p\,dZ + Z\,dp = 0,$$
$$dY + q\,dZ + Z\,dq = 0,$$
$$dZ - \overline{dz} = p\,dX - \overline{p\,dx} + q\,dY - \overline{q\,dy} + (X - x)\,dp + (Y - y)\,dq.$$

Les trois termes surmontés d'un trait se détruisent parce que x, y, z est un point de la surface donnée, et l'on peut alors éliminer dp et dq entre les trois dernières équations, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} dX + p\,dZ & Z & 0 \\ dY + q\,dZ & 0 & Z \\ p\,dX + q\,dY - dZ & X - x & Y - y \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$[pZ - (X - x)]\,dX + [qZ - (Y - y)]\,dY$$
$$= [p(X - x) + q(Y - y) + Z]\,dZ,$$

ou encore

$$(\delta) \qquad (x - 2X)\,dX + (y - 2Y)\,dY + (z - 2Z)\,dZ = 0.$$

Si l'on résout cette dernière équation par rapport à dZ, les coefficients de dX, dY seront P et Q et ne dépendent que de x, y, z, p, q, ce que nous voulions démontrer.

Remarque. — L'équation (δ) exprime la propriété suivante : *La droite qui joint le point* μ *au milieu de* OM *est perpendiculaire à tous les déplacements* dX, dY, dZ, *en d'autres termes est la normale à la seconde surface au point* μ. C'est la construction connue du plan tangent au point μ.

Réciprocité des transformations de contact. — Nous allons établir pour toutes ces transformations une certaine réciprocité. Entre les équations (α) éliminons p et q, considérées comme variables indépendantes. Nous obtiendrons une équation

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

qui représentera deux surfaces Σ ou Σ' suivant que l'on y considérera x, y, z ou X, Y, Z comme les coordonnées courantes. *La surface* Σ *enveloppe le lieu* S' *du point* X, Y, Z *et la surface* Σ' *le lieu* S *du point* x, y, z.

Pour le démontrer, soient M, M_1, M_2 trois points infiniment voisins de S auxquels correspondent trois surfaces Σ, Σ_1, Σ_2 se coupant deux à deux suivant des courbes distinctes : soit par exemple γ_1 la courbe commune à Σ et Σ_1, et γ_2 celle commune à Σ et à Σ_2; le point μ de l'enveloppe S' est la limite du point d'intersection de γ_1 et γ_2. Cela posé, je considère encore la courbe C_1 d'intersection de S' et de Σ_1 et la courbe C_2 d'intersection de S' et de Σ_2; ces deux courbes se coupent en un point μ_1 infiniment voisin de μ, parce que les deux surfaces S' et Σ sont tangentes en μ. De plus, et pour la même raison, un point μ' pris sur γ_1 et un point μ'_1 pris sur C_1, dans le voisinage immédiat de μ, sont à une distance $\mu'\mu'_1$ infiniment petite du deuxième ordre l'un de l'autre; de même $\mu''\mu''_1$ est infiniment petit du deuxième ordre, μ'' et μ''_1 étant pris dans les mêmes conditions sur γ_2 et C_2. Donc enfin le plan tangent en μ à Σ, ou à S', est la limite, soit du plan $\mu\mu'\mu''$, soit du plan $\mu\mu'_1\mu''_1$. Cherchons maintenant l'enveloppe de la surface Σ' : nous devons considérer trois surfaces Σ', Σ'_1, Σ'_2 correspondant à trois points de S' infiniment voisins μ, μ'_1, μ''_1 ou, ce qui revient au même, à trois points μ, μ', μ'', puisque $\mu'\mu'_1$ et $\mu''\mu''_1$ sont du second ordre.

Mais alors Σ'_1 passe au point M_1 et Σ'_2 au point M_1; Σ'_1 et Σ'_2 coupent donc Σ' infiniment près du point M qui est un point de l'enveloppe de Σ'; comme MM_1M_2 a pour limite le plan tangent soit à S, soit à Σ', le théorème est entièrement démontré.

Exemple. Revenons aux équations (γ) du problème des podaires. Le résultat de l'élimination de p et de q entre ces équations est

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - Xx - Yy - Zz = 0.$$

Si x, y, z sont considérés comme des paramètres, l'équation précédente représente une sphère décrite sur OM comme diamètre : la podaire est l'enveloppe de cette sphère.

Si X, Y, Z sont des paramètres, la même équation représente un plan passant au point μ et perpendiculaire sur $O\mu$: c'est le plan tangent à la surface donnée, il enveloppe cette surface.

RECHERCHE DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

Théorème général. — *Si l'on appelle* X, Y, Z *les nouvelles variables, et* P, Q *les dérivées de* Z *par rapport à* X *et à* Y, *le problème qui consiste à rechercher dans quels cas ces cinq quantités s'expriment en fonction de* x, y, z, p, q *est le même que celui où l'on cherche cinq fonctions* X, Y, Z, P, Q *de cinq variables indépendantes* x, y, z, p, q *satisfaisant à l'équation différentielle*

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho\,(dz - p\,dx - q\,dy),$$

où ρ *est une fonction de* x, y, z, p, q.

1° Je suppose trouvées cinq fonctions X, Y, Z, P, Q de x, y, z, p, q vérifiant l'équation précédente. Si en plus p et q désignent les dérivées de z par rapport à x et y, on aura

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

et, par suite,

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0,$$

ce qui veut dire que

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

2° Réciproquement, si l'on a obtenu une transformation de contact, et si l'on suppose ensuite x, y, z,

p, q indépendantes, il existera une relation de la forme

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Par hypothèse l'élimination de dx et dy indiquée (p. 15) entre les relations (β) a réussi, c'est-à-dire qu'on a pu trouver des multiplicateurs P, Q ne contenant pas r, s, t et tels qu'on ait identiquement

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0,$$

p, q étant jusqu'à présent $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Mais r, s, t ne figurent que dans dp et dq; il faut donc qu'en formant

$$dZ - P\,dX - Q\,dY$$

le coefficient de dp disparaisse ainsi que celui de dq.

Donc

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial p} - P\frac{\partial f}{\partial p} - Q\frac{\partial f_1}{\partial p} = 0,\\ &\frac{\partial f_2}{\partial q} - P\frac{\partial f}{\partial q} - Q\frac{\partial f_1}{\partial q} = 0.\end{aligned}\right.$$

De plus, les coefficients de dx, dy doivent être aussi nuls :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial x} + p\frac{\partial f_2}{\partial z} - P\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) - Q\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - p\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial f_2}{\partial y} + p\frac{\partial f_2}{\partial z} - P\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) - Q\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + q\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

et ces conditions sont évidemment suffisantes.

Si l'on peut trouver des fonctions P et Q vérifiant ces quatre équations, le problème sera résolu. Les équations (2) feront connaître dX, dY, dZ, d'où X, Y, Z.

Cela posé, multiplions les quatre équations ci-dessus par dp, dq, dx, dy, et ajoutons : il vient, en considérant x, y, z, p, q comme des variables indépendantes,

$$df_2 - \frac{\partial f_2}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy)$$
$$= \mathrm{P}\left[df - \frac{\partial f}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy)\right]$$
$$+ \mathrm{Q}\left[df_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy)\right],$$

c'est-à-dire

$$d\mathrm{Z} - \mathrm{P}\,d\mathrm{X} - \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} = \rho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

en posant

$$\rho = \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} - \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - \mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}.$$

Le théorème est donc démontré.

Application. — *Transformation d'Ampère.* — L'expression $dz - p\,dx - q\,dy$ peut s'écrire

$$d(z - qy) - p\,dx + y\,dq.$$

Posons

$$\mathrm{Z} = z - qy, \qquad \mathrm{X} = x, \qquad \mathrm{Y} = q;$$
$$\mathrm{P} = p, \qquad \mathrm{Q} = -y.$$

On voit que

$$d\mathrm{Z} - p\,d\mathrm{X} - \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} = dz - p\,dx - q\,dy,$$

par suite $\rho = 1$ et l'on a une transformation de contact, due à Ampère, et qui pourra être utilisée quand celle de Legendre sera illusoire, c'est-à-dire quand on aura

$$rt - s^2 = 0.$$

Il est facile de se rendre compte pourquoi, dans cette hypothèse, on ne peut prendre p et q comme variables indépendantes.

Choisissons en effet x et q comme variables (*voir* ci-dessus) et calculons $\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy;$$

d'où

$$dp = \left(r - \frac{s^2}{t}\right)dx + \frac{s}{t}\,dq,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{rt - s^2}{t}.$$

Donc, si $rt - s^2 = 0$, p ne dépend pas de x; il y a donc une relation entre p et q, ce qui empêche de les prendre comme variables indépendantes.

Remarque. — La transformation de Legendre résulte de même de l'identité

$$d(z - px - qy) - x\,dp - y\,dq = dz - p\,dx - q\,dy,$$

où l'on peut poser

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = z - px - qy,$$
$$P = x, \qquad Q = y.$$