Nouvelles annales de mathématiques

Andoyer

Sur la dynamique du point

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 52-65

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__52_1>

SUR LA DYNAMIQUE DU POINT;

PAR M. ANDOYER.

1. Soit un point matériel M, de masse m, soumis à une force dérivant d'un potentiel U, tel que, v désignant sa vitesse, on ait

$$mv^2 = 2U.$$

Si F_n et F_b sont les projections de la force sur la normale principale et sur la binormale à la trajectoire, on a

$$F_b = 0, \qquad \frac{2U}{\rho} = F_n,$$

ρ désignant le rayon de courbure.

Imaginons maintenant que l'on oblige le même point à suivre la même courbe sous l'action d'une force dérivée d'un potentiel U′ *fonction de* U, tel que, v' désignant la vitesse dans ce nouveau mouvement, on ait

$$mv'^2 = 2U'.$$

On aura aussi, en appelant F'_b et F'_n les quantités analogues à F_b et à F_n, et N la réaction de la courbe, dirigée nécessairement suivant la normale principale,

$$F'_b = F_b \frac{dU'}{dU} = 0, \qquad F'_n = F_n \frac{dU'}{dU} = \frac{2U'}{\rho} - N.$$

La force est dans le plan osculateur, de même que la réaction de la courbe.

Ces équations peuvent servir dans presque tous les cas à ramener la question de l'étude du mouvement d'un point sur une courbe fixe (la force étant assujettie à rester dans le plan osculateur) à l'étude du mouvement d'un point libre admettant cette courbe comme trajectoire. Cette question n'est pas sans intérêt : nous allons en donner plusieurs exemples.

1° Soient donnés

$$U' \quad \text{et} \quad N = \frac{f(v')}{\rho} = \frac{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}{\rho}.$$

On a alors la relation

$$2U \frac{dU'}{dU} = 2U' - f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right),$$

$$U = e^{\int \frac{dU'}{U' - \frac{1}{2} f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}}.$$

Si en particulier $f(v')$ est une constante $2a$,

$$U = C(U' - a),$$

C étant une constante arbitraire.

Ce résultat est d'ailleurs très connu.

2° On donne

$$U' \quad \text{et} \quad N = F'_n f(v') = F'_n f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right).$$

On a donc

$$F'_n\left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)\right] = \frac{2U'}{\rho} = \frac{2U}{\rho}\frac{dU'}{dU}\left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)\right],$$

d'où

$$\frac{dU}{U} = \frac{dU'}{U'}\left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)\right],$$

$$U = U' e^{\int \frac{dU'}{U'} f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}.$$

Si en particulier $f(v')$ est une constante a, on a

$$U = C\,U'^{a+1},$$

C étant une constante arbitraire.

C'est encore un résultat connu; pour $a = -1$, il correspond à la théorie des brachistochrones.

3° On donne

$$U' \quad \text{et} \quad F'_n = \frac{f(v')}{\rho} = \frac{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}{\rho};$$

alors

$$f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right) = 2U\frac{dU'}{dU},$$

$$U = e^{\int \frac{2\,dU'}{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}}.$$

Si $f(v') = mv'^2$, on trouve, naturellement, $U = CU'$.

Ce cas rentre d'ailleurs dans le premier, puisque $N = \frac{2U' - f(v')}{\rho}$.

2. Le plus généralement U et U′ seront fonctions de la distance à un plan, à un point ou à une droite, et s'il en est de même des diverses quantités qu'on peut se donner pour déterminer le mouvement, le problème sera susceptible de quelque extension.

Supposons d'abord U et U′ fonctions de la distance à un plan, celui des xy. Le mouvement a lieu dans un plan parallèle à l'axe des z, que nous pouvons choisir pour le plan des xz.

En faisant $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}$, A étant une constante arbitraire, la trajectoire est déterminée par

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{UA - 1}};$$

le rayon de courbure est donné par

$$\rho = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} dz}{d(UA)}.$$

On a aussi

$$F_n = \frac{dU}{dz\sqrt{UA}},$$

et, en appelant F_t la force tangentielle,

$$F_t = \frac{dU}{dz}\sqrt{1 - \frac{1}{UA}}.$$

Cela étant, supposons qu'on veuille déterminer la courbe dans le plan de zx, en se donnant en fonction de z :

1° U′ et N. On aura

$$\frac{2U}{\rho}\frac{dU'}{dU} = \frac{2U'}{\rho} - N,$$

$$(\mathrm{UA})\,d\mathrm{U}' - \mathrm{U}'\,d(\mathrm{UA}) + (\mathrm{UA})^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{N}\,dz = 0,$$

$$\mathrm{UA} = \frac{\mathrm{U}'}{\left(\displaystyle\int \frac{\mathrm{N}\,dz}{2\sqrt{\mathrm{U}'}}\right)^2}$$

et

$$dx = \frac{dz \displaystyle\int \frac{\mathrm{N}\,dz}{2\sqrt{\mathrm{U}'}}}{\sqrt{\mathrm{U}' - \left(\displaystyle\int \frac{\mathrm{N}\,dz}{2\sqrt{\mathrm{U}'}}\right)^2}}.$$

Exemple (*a*) :

$$\mathrm{U}' = mg(z+h), \qquad \mathrm{N} = \lambda mg,$$

$$dx = \frac{dz\,(k + \lambda\sqrt{z+h})}{\sqrt{(z+h) - (k + \lambda\sqrt{z+h})^2}}.$$

Exemple (*b*) :

$$\mathrm{U}' = mgz, \qquad \mathrm{N} = \lambda mgz^n,$$

$$dx = \frac{dz\left(k + z^{n+\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{\dfrac{(2n+1)^2}{\lambda^2}\,z - \left(k + z^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}}.$$

2° U' et F'_n.

$$\mathrm{F}'_n = \frac{2\mathrm{U}}{\rho}\,\frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{U}} = \frac{d\mathrm{U}'}{dz\sqrt{\mathrm{UA}}},$$

$$\mathrm{UA} = \left(\frac{d\mathrm{U}'}{dz}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{F}'^2_n},$$

$$dx = \frac{\mathrm{F}'_n\,dz}{\sqrt{\left(\dfrac{d\mathrm{U}'}{dz}\right)^2 - \mathrm{F}'^2_n}}.$$

Exemple :

$$\mathrm{U}' = mgz, \qquad \mathrm{F}'_n = mg\lambda z^n,$$

$$dx = \frac{z^n\,dz}{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2} - z^{2n}}}.$$

3° U′ et F'_t. On en tire

$$F'_n = \sqrt{\left(\frac{dU'}{dz}\right)^2 - F'^2_t},$$

et l'on est ramené au cas précédent.

4° U′ et la force centripète $F'_c = \dfrac{mv'^2}{\rho}$.

On a

$$F'_c = \frac{2U'}{\rho} = \frac{U'd(UA)}{(UA)^{\frac{3}{2}}dz},$$

$$UA = \frac{1}{\left(\int \frac{F'_c\,dz}{2U'}\right)^2},$$

$$dx = \frac{dz\int \frac{F'_c\,dz}{2U'}}{\sqrt{1-\left(\int \frac{F'_c\,dz}{2U'}\right)^2}}.$$

Exemple :

$$U' = mgz, \qquad F'_c = mg\lambda z^n,$$

$$dx = \frac{dz(z^n+k)}{\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2}-(z^n+k)^2}}.$$

5° Connaissant U ou l'une quelconque des quantités qui peuvent déterminer U et U′, calculer N.

$$N = \frac{2\left(U'-U\frac{dU'}{dU}\right)}{\rho} = \frac{U'd(UA)-(UA)\,dU'}{(UA)^{\frac{3}{2}}dz}.$$

Exemple. — La courbe est

$$x^2 = 2pz \qquad \text{et} \qquad U' = mpc^2\left(z+\frac{p}{2}\right).$$

On a d'abord

$$UA = \frac{2z}{p}+1,$$

et, par suite,

$$N = 0.$$

6° Connaissant U et N, calculer U'.

$$\frac{2U}{\rho}\frac{dU'}{dU} = \frac{2U'}{\rho} - N,$$

$$(UA)\,dU' - U'\,d(UA) + N(UA)^{\frac{3}{2}}\,dz = 0,$$

$$U' = kUA - UA\int \frac{N\,dz}{\sqrt{UA}}.$$

Exemple. — La courbe est

$$z^2 = 2px \qquad \text{et} \qquad N = \lambda.$$

On a d'abord

$$UA = \frac{p^2}{z^2} + 1,$$

$$U' = k\left(\frac{p^2}{z^2} + 1\right) - \lambda z\left(\frac{p^2}{z^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

3. Supposons maintenant U et U' fonctions de la distance à un point. Soit l'origine ce point; la courbe est dans un plan que nous prendrons pour celui des xy, et, en coordonnées polaires, on aura

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}, \qquad d\theta = \frac{dr}{r\sqrt{r^2\,UA - 1}},$$

$$\rho = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}}\,r\,dr}{d(UA)},$$

$$F_n = \frac{dU}{r\,dr\sqrt{UA}}, \qquad F_t = \frac{dU}{dr}\sqrt{1 - \frac{1}{r^2\,UA}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec ces formules, on pourra traiter les mêmes problèmes que précédemment.

Il en sera de même si l'on suppose U et U' fonctions de la distance à une droite, l'axe des z, par exemple; faisant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, on aura comme formules principales,

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2A'}{m}}, \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}, \quad d\theta = \frac{dr}{r\sqrt{r^2(U-A')A-1}},$$

$$\rho = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}}\,r\,dr}{d(UA)\sqrt{1+AA'r^2}}.$$

4. Imaginons maintenant que le point M se meuve sur une surface donnée sous l'action du potentiel U; soient F_n et F_g les projections de la force sur la normale à la surface et la normale à la courbe située dans le plan tangent; soient enfin ρ_g et R le rayon de courbure géodésique de la courbe et le rayon de courbure de la section normale correspondante, N la réaction; on a

$$mv^2 = 2U, \qquad \frac{2U}{\rho_g} = F_g, \qquad \frac{2U}{R} = F_n + N.$$

Si l'on oblige le même point à suivre la même courbe sous l'action d'une force dérivée du potentiel U', fonction de U, on aura, en appelant v', F'_g et F'_n les quantités analogues à v, F_g et F_n, et désignant par N'_g et N'_n les projections correspondantes de la réaction N',

$$\begin{gathered} mv'^2 = 2U', \\ \frac{2U'}{\rho_g} - N'_g = F'_g = F_g\frac{dU'}{dU}, \\ \frac{2U'}{R} - N'_n = F'_n = F_n\frac{dU'}{dU}, \end{gathered}$$

et ces équations permettront de résoudre des questions tout à fait semblables à celles qui ont été résolues plus haut. Les deux premières applications subsistent pour ainsi dire sans modifications. Pour aller plus loin, nous donnerons les formules principales qu'il y aura lieu d'employer dans les cas les plus fréquents.

1° U et U' sont fonctions de z. La surface est de révolution et a pour équation $z=f(r)$.

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2}{mA}},\qquad d\theta=\frac{dr\sqrt{1+f'^2}}{r\sqrt{r^2UA-1}},$$

$$N=\frac{dU}{dz}\,\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}-\frac{2Uf'}{r\sqrt{1+f'^2}}-\frac{2}{Ar}(r^2UA-1)\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}\right),$$

$$F_n=-\frac{dU}{dz}\,\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}},\qquad F_g=\frac{dU}{dz}\,\frac{f'}{\sqrt{UA}\,r\sqrt{1+f'^2}},$$

$$F_t=\frac{dU}{dz}\,\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\sqrt{1-\frac{1}{r^2UA}},$$

$$\rho_g=\frac{2(UA)^{\frac{3}{2}}r\,dz\sqrt{1+f'^2}}{f'\,d(UA)},$$

$$R=\frac{UA}{-\frac{1}{r}(r^2UA-1)\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}\right)-UA\,\frac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}}.$$

Exemple. — Sur le paraboloïde $z=\frac{r^2}{2p}$, on suppose $U'=mg(z+h)$; en outre, la projection de N' sur Oz est $-mg$, de sorte que le point est animé dans le sens de Oz d'un mouvement uniforme. On trouve

$$\frac{1}{UA}=2pz-kp\,\frac{2z+p}{z+h}$$

et, par suite,

$$d\theta=\frac{dr}{pr\sqrt{2kp}}\sqrt{r^2(r^2+2ph)-2kp(r^2+p^2)}.$$

Il est clair, d'ailleurs, que le problème est plus facile à traiter directement que de cette façon.

2° U et U' sont fonctions de la distance à un point $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; la surface est de révolution et a pour équation $z=f(r)$.

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2}{mA}},\qquad d\theta=\frac{dr\sqrt{1+f'^2}}{r\sqrt{r^2UA-1}},$$

$$N=\frac{dU}{dR}\,\frac{z-rf'}{R\sqrt{1+f'^2}}-\frac{2Uf'}{r\sqrt{1+f'^2}}-\frac{2(r^2UA-1)}{Ar}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}\right),$$

$$F_n = \frac{dU}{dR}\,\frac{rf' - z}{R\sqrt{1+f'^2}}, \qquad F_g = \frac{dU}{dR}\,\frac{r + zf'}{\sqrt{UA}\,Rr\sqrt{1+f'^2}},$$

$$F_t = \frac{dU}{dR}\,\frac{(r+zf')\sqrt{1-\dfrac{1}{r^2 UA}}}{R\sqrt{1+f'^2}},$$

$$\rho_g = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} Rr\,dR\sqrt{1+f'^2}}{(r+zf')\,d(UA)},$$

$$R = -\frac{UA}{-\dfrac{1}{r}(r^2UA - 1)\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}\right) - UA\,\dfrac{f'}{r\sqrt{1+f'^2}}}.$$

3° U et U′ sont fonctions de la distance à une droite r; la surface est un hélicoïde.

$z = f(r) + h\theta$ (pour $h = 0$, la surface est de révolution).

$$r^2\frac{d\theta}{dt} + h\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}},$$

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{hf'}{r^2+h^2} + \frac{1}{r^2+h^2}\sqrt{\frac{(1+f'^2)r^2+h^2}{UA(r^2+h^2)-1}},$$

$$\begin{aligned} N = {} & \frac{dU}{dr}\,\frac{rf'}{\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}} \\ & - \frac{4h\sqrt{UA(r^2+h^2)-1}}{A(r^2+h^2)^2} + \frac{2Ur^2f'}{(r^2+h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}} \\ & + \frac{2[UA(r^2+h^2)-1]}{Ar}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2f'}{(r^2+h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}}\right], \end{aligned}$$

$$F_n = -\frac{dU}{dr}\,\frac{rf'}{\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}},$$

$$F_g = \frac{dU}{dr}\,\frac{1}{\sqrt{UA}\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}},$$

$$F_t = \frac{\dfrac{dU}{dr}\sqrt{h^2+r^2-\dfrac{1}{UA}}}{\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}},$$

$$\rho_g = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}}\,dr\sqrt{h^2+(1+f'^2)r^2}}{d(UA)},$$

$$R = \frac{UA}{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-2h\sqrt{UA(r^2+h^2)-1}}{(r^2+h^2)^2} + UA\,\dfrac{r^2 f'}{(r^2+h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}} \\ + \dfrac{[UA(r^2+h^2)-1]}{r}\,\dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{r^2 f'}{(r^2-h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}}\right]\end{array}\right\}}.$$

Il est clair que les formules qui précèdent peuvent encore servir à résoudre quantité de problèmes sur le mouvement d'un point matériel assujetti ou non à rester sur une surface donnée.

3. Il est de même intéressant de ramener les courbes tautochrones à des trajectoires libres d'un point matériel.

Si U' est le potentiel s'annulant au point de tautochronisme, et si T est le temps constant pour arriver à ce point, on a, en appelant s l'arc de la courbe compté à partir du point de tautochronisme,

$$\frac{dU'}{ds} + \frac{\pi^2 m}{4T^2} s = 0,$$

d'où

$$U' + \frac{\pi^2 m}{8T^2} s^2 = 0$$

et

$$dU'^2 + \frac{\pi^2 m}{2T^2} U'\,ds^2 = 0.$$

Supposons d'abord le point libre et la force assujettie à rester dans le plan osculateur; si d'abord U' est fonction de z, la courbe est dans le plan des xz par exemple, et l'on a

$$dx = dz\sqrt{-1 - \frac{2T^2}{\pi^2 m\,U'}\,\frac{dU'^2}{dz^2}}.$$

Le potentiel U sous l'action duquel le même point décrirait librement la même courbe est déterminé par

$$UA = \frac{\dfrac{2T^2}{\pi^2 m\,U'}\left(\dfrac{dU'}{dz}\right)^2}{1 + \dfrac{2T^2}{\pi^2 m\,U'}\left(\dfrac{dU'}{dz}\right)^2}.$$

Inversement, on peut en déduire U′ en fonction de UA.

Exemple :

$$U' = mgz,$$

$$UA = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 z}{2T^2 g}},$$

$$dx = dz\sqrt{\frac{-z}{\frac{2T^2 g}{\pi^2} + z}}.$$

Soit maintenant U′ fonction de la distance à un point; la courbe est dans le plan des xy par exemple, et l'on a

$$d\theta = \frac{dr\sqrt{-1 - \frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}}{r}.$$

On en déduit

$$UA = \frac{\frac{1}{r^2}\frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + \frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

Exemple :

$$U' = \frac{m\lambda}{r}(a^2 - r^2),$$

$$UA = \frac{1}{r^2 + \frac{\pi^2}{4\lambda T^2}(a^2 - r^2)},$$

$$d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{\frac{4\lambda T^2}{\pi^2} r^2 - r^2 + a^2}{r^2 - a^2}}.$$

Enfin imaginons que U′ est fonction de r; on aura d'abord, d'après la condition que la force est dans le plan osculateur,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{dz}{C} \qquad \text{puis} \qquad d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{-1 - \frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + C^2 r^2}},$$

d'où

$$(U - A')A = \frac{-C^2 + \frac{1}{r^2}\frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + \frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

De même, sur l'hélicoïde $z = f(r) + h\theta$, avec U' fonction de r, on aura

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{hf'}{r^2+h^2} + \frac{1}{r^2+h^2}\sqrt{-[(1+f'^2)r^2+h^2]-(r^2+h^2)\frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

Sur une surface de révolution $z = f(r)$, on aura

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r}\sqrt{-(1+f'^2)-\frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}},$$

et l'on pourra aussi bien supposer U' fonction de z et R, à cause de l'équation de la surface qui permet toujours d'exprimer $\frac{dU'}{dr}$ en fonction de r.

De ces formules, on tirerait facilement les valeurs correspondantes de UA. Si, par exemple, la surface est de révolution et U' fonction de r, on a

$$UA = \frac{\frac{1}{r^2}\frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}{1+f'^2+\frac{2T^2}{\pi^2 m U'}\frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

Exemple. — Déterminer une surface de révolution telle que la ligne géodésique tangente en A au parallèle du rayon p soit tautochrone en A pour la force

$$-m(ar+b)$$

(Agrégation, 1885).

Ici

$$UA = \frac{1}{p^2}, \qquad U' = m\left[\frac{a}{r}(p^2-r^2)+b(p-r)\right],$$

et, en faisant

$$a = \frac{\pi^2}{4T^2}\alpha, \qquad b = \frac{\pi^2}{4T^2}\beta,$$

on a

$$f'^2 = \frac{\alpha(\alpha-1)r^3+(\alpha-1)(p\alpha+2\beta)r^2+(2p\alpha+\beta)\beta r+p\beta^2}{r^2(\alpha r+\alpha p+2\beta)}.$$

Remarque. — Il y a une différence essentielle entre les problèmes traités dans le premier paragraphe et ceux qui suivent : pour ceux-ci, en effet, c'est la quantité UA et non U qui joue le rôle prépondérant. Il est inutile d'insister sur les conséquences immédiates qui résultent de ce fait.