

S. HOTT

## Sur un problème proposé par M. E. Amigues

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1894), p. 488-490

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1894\\_3\\_13\\_\\_488\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__488_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SUR UN PROBLÈME PROPOSÉ PAR M. E. AMIGUES;**

PAR M. S. HOTT.

---

Dans ses *Leçons d'Algèbre à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales*, M. E. Amigues propose le problème suivant après l'étude des séries :

*On a deux cercles A et B égaux et tangents et une tangente commune. Dans le triangle curviligne qu'ils forment, on inscrit un cercle C<sub>1</sub>, puis, dans le triangle formé par les cercles A, B, C<sub>1</sub>, on inscrit un cercle C<sub>2</sub>; ainsi de suite. Expression générale des rayons de ces cercles. Somme de leurs aires.*

1. Soient  $p$  un entier et  $R$  et  $r_p$  les rayons des cercles A et C<sub>p</sub>. Je pose

$$s_p = r_1 + r_2 + \dots + r_p.$$

Par raison de symétrie, les centres des cercles C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, ... se trouvent sur la tangente aux cercles A et B menée par leur point de contact, et, par suite, la distance de ce point au centre du cercle C<sub>n</sub> est égale à

$$R - 2s_{n-1} - r_n.$$

Un théorème connu sur les tangentes et sécantes

menées à un cercle par un même point donne

$$(R - r_1)^2 = r_1(2R + r_1).$$

$$(R - 2s_{n-1} - r_n)^2 = r_n(2R + r_n).$$

D'où

$$r_1 = \frac{R}{4},$$

$$(1) \quad r_n = \frac{(R - 2s_{n-1})^2}{4(R - s_{n-1})}.$$

En calculant, à l'aide de la formule (1),  $r_2, r_3, r_4$ , on remarque que l'expression

$$R - 2s_{n-1}$$

prend successivement les valeurs  $\frac{R}{2}, \frac{R}{3}, \frac{R}{4}$ .

On est ainsi amené à poser

$$R - 2s_{n-1} = \frac{R}{n};$$

c'est-à-dire

$$s_{n-1} = \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

d'où

$$s_n = \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

et, par soustraction,

$$(2) \quad r_n = \frac{R}{2n(n+1)}.$$

La formule (2) est vérifiée par les valeurs  $\frac{R}{4}, \frac{R}{12}, \frac{R}{24}, \frac{R}{40}$ , que l'on obtient en calculant directement  $r_1, r_2, r_3, r_4$ . En la supposant vraie pour les rayons  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ , on a

$$s_{n-1} = \sum_1^{n-1} \frac{R}{2p(p+1)} = \frac{R}{2} \sum_1^{n-1} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right),$$

et la relation (1) devient

$$r_n = \frac{\left(\frac{R}{n}\right)^2}{4\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2n}\right)} = \frac{R}{2n(n+1)}.$$

La formule (2) est donc exacte.

On peut remarquer que la limite de  $s_n$  pour  $n$  infini est égale à  $\frac{R}{2}$ . Ce résultat était facile à prévoir, car la somme des diamètres de tous les cercles  $C_1, C_2, \dots$ , est évidemment égale à  $R$ .

2. Soit  $S$  la somme des aires de ces cercles.

$$S = \frac{\pi R^2}{4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

En partant de l'identité

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)},$$

et s'appuyant sur les formules (4)

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

on trouve

$$S = \frac{\pi R^2(\pi^2 - 9)}{12}.$$

(4) JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 2<sup>e</sup> édition, t. I, p. 360.