Nouvelles annales de mathématiques

Auric

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 47-52

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__47_1>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS;

PAR M. AURIC.

1. Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0. \tag{1}$$

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les racines de l'équation caractéristique. On donne, en général, comme solution générale de l'équation (1)

$$(2)\qquad y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}.$$

Cette façon de s'exprimer donne lieu, suivant nous, à de nombreuses objections.

1° En général, ce sont les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui sont donnés et connus et non les racines $m_1, m_2, \ldots, m_n$; la solution devrait donc être donnée en fonction des coefficients p.

2° En général, ce sont les conditions initiales qu'on se donne arbitrairement; il en résulte que les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, étant des fonctions bien déterminées de ces conditions initiales, ne sont plus absolument arbitraires.

3° La solution devant être fonction des coefficients p, en d'autres termes des données mêmes de la question, doit être une fonction symétrique des racines, ce qui ne peut avoir lieu que si les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont elles-mêmes des fonctions particulières de ces racines.

En résumé, la solution (2) est plutôt une solution symbolique qu'une véritable solution pratique.

Dans notre thèse (Chap. VIII), nous sommes arrivé au résultat suivant.

Considérons la fraction

$$\frac{\left\{\begin{array}{r} y_0 + \left[\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 + p_1 y_0\right] x + \left[\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + p_1\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 + p_2 y_0\right] x^2 + \ldots \\ + \left[\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 + \ldots + p_{n-1} y_0\right] x^{n-1} \end{array}\right\}}{1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n},$$

et admettons que cette fraction développée soit

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

la solution générale de l'équation (1) prend la forme

$$(3)\qquad y = a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + a_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

solution susceptible d'applications immédiates, car, ainsi que nous allons le montrer, la série obtenue est toujours convergente.

2. *Remarque.* — Si une série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

est convergente pour la valeur $x_0 \neq 0$ de x, je dis que la série

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + a_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

est convergente pour toute valeur de x.

En effet, la série

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots$$

étant convergente, on a nécessairement

$$a_n x_0^n \leqq \mathrm{M};$$

on aura donc, en valeur absolue,

$$a_n \frac{x^n}{1.2.3\dots n} \leqq \mathrm{M} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^n}{1.2.3\dots n},$$

d'où l'on voit que la série

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

a chacun de ses termes plus petits en valeur absolue que ceux de la série toujours convergente

$$\mathrm{M} e^{\frac{x}{x_0}} = \mathrm{M} + \mathrm{M} \frac{\frac{x}{x_0}}{1} + \mathrm{M} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}{1.2} + \dots:$$

donc cette série est également toujours convergente.

3. Si maintenant nous considérons la fonction

$$\frac{U}{1+p_1x+p_nx_n}$$

U étant un polynome entier de degré $(n-1)$ en x, et si ρ est le module minimum des racines de l'équation

$$1+p_1x+\ldots+p_nx^n=0,$$

cette fonction sera holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon ρ; on pourra donc lui appliquer le théorème de Taylor; en d'autres termes, le quotient développé sera une série convergente pour toute valeur de x inférieure à ρ.

Il en résulte que le procédé indiqué plus haut est toujours applicable.

4. *Applications.* — 1° L'équation caractéristique a une seule racine réelle,

$$\frac{dy}{dx}-ay=0.$$

Nous considérons la fraction

$$\frac{y_0}{1-ax}=y_0(1+ax+a^2x^2+\ldots)$$

et la solution est

$$(4)\qquad y_0\left(1+\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{1.2}+\ldots\right)=y_0e^{ax}.$$

2° L'équation caractéristique a deux racines imaginaires

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\rho\cos\theta\frac{dy}{dx}+\rho^2y=0.$$

Nous avons à développer la fraction

$$\frac{y_0+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+p_1y_0\right]x}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2}=\frac{y_0+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-2\rho\cos\theta\,y_0\right]x}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2}.$$

Or, en considérant le développement de $\frac{1}{1-\rho x e^{\theta i}}$, on trouve les deux formules

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1-\rho x\cos\theta}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2} &= 1+\rho x\cos\theta+\rho^2x^2\cos2\theta+\rho^3x^3\cos3\theta+\ldots,\\ \frac{\rho x\sin\theta}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2} &= \qquad \rho x\sin\theta+\rho^2x^2\sin2\theta+\rho^3x^3\sin3\theta+\ldots, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on a la solution générale

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} y-y_0 = {} & \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\rho x}{1}\sin\theta+\frac{\rho^2x^2}{1.2}\sin2\theta \right.\\ & \qquad\qquad \left. +\frac{\rho^3x^3}{1.2.3}\sin3\theta+\ldots\right)\\ & -y_0\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\rho^4x^4}{1.2}\sin\theta+\frac{\rho^3x^3}{1.2.3}\sin2\theta \right.\\ & \qquad\qquad \left. +\frac{\rho^4x^3}{1.2.3.4}\sin3\theta+\ldots\right). \end{aligned}\right.$$

3° Incidemment, remarquons que les séries (5) restent convergentes tant que $\mathrm{mod}(\rho x) < 1$.

En effet, si on limite ces séries au $x^{\text{ième}}$ terme, les restes respectifs prennent la forme

$$\frac{\rho^{n+1}x^{n+1}[\cos(n+1)\theta+\rho x\cos(n+2)\theta]}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2},$$

$$\frac{\rho^{n+1}x^{n+1}[\sin(n+1)\theta+\rho x\sin(n+2)\theta]}{1-2\rho x\cos\theta+\rho^2x^2},$$

et ces restes tendent vers zéro lorsque $\mathrm{mod}(\rho x) < 1$; on en déduit la règle de convergence suivante:

Soit la série

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots;$$

si, à la limite, on a, soit

$$\lim a_n = \rho^n\cos n\theta,$$

soit

$$\lim a_n = \rho^n\sin n\theta,$$

la série sera convergente pour toute valeur de x de module inférieur à $\frac{1}{\rho}$.

Ce résultat peut être généralisé par la considération des sinus d'ordre supérieur.

4° Admettons que l'on connaisse les racines de l'équation caractéristique et, par suite, de l'équation aux inverses

$$1 + p_1 x + \ldots + p_n x^n = 0;$$

on décomposera en éléments simples la fraction

$$\frac{U}{1 + p_1 x + \ldots + p_n x^n},$$

et l'on obtiendra des fractions élémentaires de la forme

$$\frac{A}{1 - ax}, \quad \frac{A}{(1 - ax)^k},$$

$$\frac{Mx + N}{1 - 2\rho x \cos\theta + \rho^2 x^2}, \quad \frac{Mx + N}{(1 - 2\rho x \cos\theta + \rho^2 x^2)^k},$$

qui donneront chacune une portion de l'intégrale générale sous une forme relativement simple.