Nouvelles annales de mathématiques

E. Carvallo

Observations sur les examens d'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 429-434
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__429_0>

OBSERVATIONS SUR LES EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. E. CARVALLO.

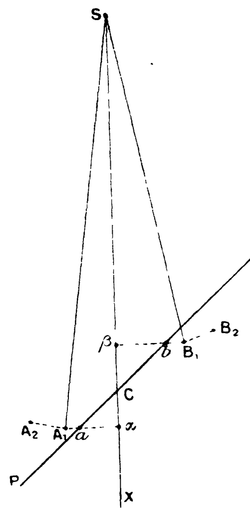
1. Les cours de Mathématiques spéciales ont atteint un tel degré de perfection que le défaut d'une démonstration y fait tache et jette une défaveur sur le candidat de valeur moyenne qui a la mauvaise chance de l'exposer.

Je veux parler de la recherche des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. Aucun des nombreux candidats qui me l'ont exposée cette année ne m'a donné une démonstration satisfaisante. Un seul, qui est classé trentième, a su compléter ses raisonnements d'après mes indications et mériter une note élevée. La plupart ont tiré de leurs cours des idées tellement fausses que je les ai vite conduits par de simples questions aux résultats les plus extravagants. Pour l'honneur de notre enseignement et dans l'intérêt des candidats, j'appelle sur cette question délicate l'attention de leurs maîtres éminents. Ma critique porte sur presque toutes les démonstrations géométriques données par les élèves; je l'exposerai sur la forme le plus généralement adoptée.

2. THÉORÈME. — *Les points de la section plane d'un cône où le plan sécant est perpendiculaire au plan tangent, sans être perpendiculaire à la génératrice de contact, fournissent des points d'inflexion quand on développe le cône sur un plan.*

Soit SX la génératrice de contact du plan tangent au point C de la section plane PQ. J'effectuerai le développement sur ce plan tangent pris comme plan de projec-

Fig. 1.



tion. Le plan sécant PQ étant supposé perpendiculaire au plan de projection, sans être perpendiculaire à la génératrice SX, se projette tout entier suivant une droite PCQ oblique à SX.

Pour effectuer le développement aux environs du point C (les élèves oublient d'ajouter *approximativement*), je considère deux génératrices voisines de SX, de part et d'autre de cette droite. Soient Sa et Sb les projections de ces génératrices. Je les rabats sur le plan de projection : a vient quelque part en A_1, sur la perpendiculaire $a\alpha$ à SX, au delà du point a. De même b se rabat quelque part en B_1. On voit ainsi que le développement de la section plane traverse la droite PQ au point C. Or on sait que cette courbe est tangente à la droite PQ au point C. Elle a donc là un point d'inflexion.

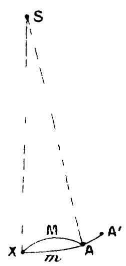
C. Q. F. D.

3. Le défaut de rigueur est celui-ci. Le point A_1 est bien le rabattement du point projeté en a, mais non pas son développement. De là, chez quantité d'élèves, confusion entre rabattement et développement. Demandez-leur d'appliquer le raisonnement au cas où le plan PQ est perpendiculaire à la génératrice SX, ils n'hésiteront pas à déclarer que, dans ce cas, le développement de la section plane entière se fait sur la droite PQ. A Paris, l'erreur a été générale. Dans huit centres de province, j'ai posé cette question : les huit candidats ont fait la même erreur persistante; quatre d'entre eux avaient la note 14 chez mon collègue; un autre la note 13. Ainsi, non seulement la démonstration manque de rigueur, mais, ce qui est plus grave, elle laisse une idée fausse dans l'esprit des élèves.

Et maintenant, quel degré atteint le défaut de rigueur? Il est d'autant plus important de s'en rendre compte que la démonstration qui nous occupe est à peu près le seul exemple de Géométrie infinitésimale qui figure maintenant dans la plupart des cours de spéciales. Or je n'hésite pas à déclarer que le principal but des promoteurs du renouvellement des programmes a été de familiariser les élèves avec l'application des infiniment petits. Les cours de l'École, pensaient-ils, surchargés de matières, vont trop vite pour poser avec un soin suffisant les principes des méthodes et montrer, dans chaque exemple, l'application des principes : dans ces cours, il faut lire entre les lignes. Or examinons à ce point de vue la démonstration précédente. Pour être regardée comme seulement incomplète dans la forme, mais rigoureuse dans le fond, il faudrait que la distance du rabattement A_1 au développement A_2 du point projeté en a fût un infiniment petit d'ordre supérieur à $a\,A_1$. Mais αA_1 est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le côté $a\alpha$ est du premier ordre et dont l'angle aigu en α est du premier ordre aussi. La valeur de l'hypoténuse $\alpha A_1 = \alpha a \,\text{séc}\, \alpha$ diffère de αa d'un infiniment petit du troisième ordre. *Ainsi, le segment* aA_1 *est du troisième ordre.* Pour évaluer maintenant l'ordre de grandeur de la distance du rabattement A_1 au développement A_2 au point a, j'opère ainsi :

Je coupe le cône S par une sphère de rayon égal à SA : elle coupe le cône suivant une courbe XMA plus longue

Fig. 2



que l'arc de grand cercle XmA; la différence entre les longueurs de ces deux courbes est du troisième ordre. Si donc on développe sur le plan XSA la portion du cône sous-tendue par l'arc XMA, le point A se développe en un point A′ situé au delà de A, à une distance AA′ qui est du troisième ordre. Telle est la distance du rabattement A_1 (*fig.* 1) au développement A_2 du point projeté en a, distance comptée sur le cercle décrit de S comme centre avec SA_1 pour rayon.

Ainsi la démonstration néglige *implicitement* la distance $A_1 A_2$ qui est du troisième ordre devant la distance aA_1 qui est aussi du troisième ordre. Et c'est par cet exemple que les élèves de l'École sont préparés à suivre des cours où pullulent des difficultés toutes semblables laissées à leur initiative! Il y a là un réel danger.

4. Est-ce à dire que la démonstration qui nous occupe doive être rejetée? Non, mais elle doit être complétée, et cela est facile de différentes manières.

D'abord, l'explication que je viens d'ajouter prouve que la distance du point A_2 à la droite PQ est du troisième ordre; que dans le cas où PQ est perpendiculaire à SX, cette distance est du quatrième ordre. Quel inconvénient verrait-on à dire que telles sont les définitions des contacts du second et du troisième ordre, conformément au cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique?

D'autre part, au point de vue purement graphique, qui a été la seule préoccupation de l'auteur de la démonstration que j'ai reproduite au n° 2, pour aller de a en A_1, il faut se déplacer d'une quantité aA_1 du troisième ordre sur la perpendiculaire αa à SX, laquelle fait avec PQ un angle fini. A partir de là, il faut se déplacer de A_1 en A_2, encore d'une quantité du troisième ordre et sur une direction normale à SA_1, c'est-à-dire sur une direction qui fait avec la précédente aA_1 un angle infiniment petit. Il est donc certain que le point A_2 tombera au-dessus de PQ. On voit de même que B_2 tombera au-dessous de PQ. La courbe développée a donc en C un point d'inflexion. Au contraire, si PQ est perpendiculaire à SC, on voit que la courbe tourne, au point C, sa concavité vers le point S.

A toutes les autres démonstrations géométriques que m'ont exposées les candidats, les mêmes observations s'appliquent. Chaque professeur apportera ses idées personnelles et donnera une bonne démonstration ; j'entends par là une démonstration qui éclaire l'esprit de l'élève au lieu de lui laisser des idées fausses.