

GENTY

**Solution de la question de mathématiques
spéciales posée au concours
d'agrégation en 1893**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 399-404

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__399_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
POSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1895;**

PAR M. GENTY.

On considère un hyperboloïde à une nappe H et le cône S qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde menés par un point donné M.

1° Déterminer les sommets du tétraèdre $MM_1M_2M_3$ conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde H et du cône S.

Trouver le lieu C des sommets M_1, M_2, M_3 de ce tétraèdre lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

2° Trouver la surface engendrée par la ligne C lorsque le point M décrit une droite donnée D, et déterminer les positions qu'il faut donner à cette droite D pour que cette surface soit de révolution.

3° Déterminer les coordonnées du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ en fonc-

tion des coordonnées du point M pour un hyperboloïde donné H .

Trouver le lieu de ce centre ω lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

4° Démontrer que la droite qui joint le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ au centre de gravité G de ce tétraèdre passe par un point fixe I lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, et faire voir que le point G est le milieu de ωI .

1° Soient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation de l'hyperboloïde H ; x' , y' et z' les coordonnées du point M ; l'équation du cône S sera

$$\frac{(x-x')^2}{A} + \frac{(y-y')^2}{B} + \frac{(z-z')^2}{C} = 0,$$

et, si l'on désigne par α , β , γ les coordonnées de l'un des sommets du tétraèdre autopolaire commun à l'hyperboloïde et au cône, les plans polaires de ce point par rapport aux deux surfaces auront respectivement pour équations

$$Ax\alpha + B\beta y + C\gamma z = 1,$$

$$\frac{(\alpha-x')(x-x')}{A} + \frac{(\beta-y')(y-y')}{B} + \frac{(\gamma-z')(z-z')}{C} = 0.$$

Ces deux équations devant être identiques, on aura

$$\frac{A^2\alpha}{\alpha-x'} = \frac{B^2\beta}{\beta-y'} = \frac{C^2\gamma}{\gamma-z'} = \frac{1}{\frac{x'(\alpha-x')}{A} + \frac{y'(\beta-y')}{B} + \frac{z'(\gamma-z')}{C}} = t,$$

ou encore

$$(1) \quad z = \frac{tx'}{t - A^2}, \quad \beta = \frac{ty'}{t - B^2}, \quad \gamma = \frac{tz'}{t - C^2},$$

$$(2) \quad A\alpha x' + B\beta y' + C\gamma z' = 1.$$

Si l'on regarde t comme un paramètre arbitraire, les équations (1) représentent une cubique gauche C , et l'équation (2) le plan polaire du point M par rapport à l'hyperboloïde.

Les points cherchés M_1 , M_2 et M_3 sont les points de la cubique situés dans ce plan, et les valeurs correspondantes de t sont les racines de l'équation

$$\frac{Ax'^2 t}{A^2 - t} + \frac{By'^2 t}{B^2 - t} + \frac{Cz'^2 t}{C^2 - t} + 1 = 0.$$

Si dans les équations (1) nous remplaçons A , B et C par kA , kB et kC respectivement, elles représenteront évidemment encore la même courbe. Donc la cubique gauche C est le lieu des points M_1 , M_2 et M_3 , lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné. Cette courbe passe à l'origine pour $t = 0$, au point M pour $t = \infty$, et ses asymptotes sont parallèles aux axes de l'hyperboloïde.

2° Si dans les équations de la cubique C nous remplaçons x' , y' et z' par $x' + kX$, $y' + kY$ et $z' + kZ$ respectivement, X , Y et Z étant les cosinus directeurs d'une droite D , elles deviennent

$$\alpha = \frac{t(x' + kX)}{t - A^2}, \quad \beta = \frac{t(y' + kY)}{t - B^2}, \quad \gamma = \frac{t(z' + kZ)}{t - C^2}$$

ou

$$A^2\alpha + t(x' - \alpha) + ktX = 0,$$

$$B^2\beta + t(y' - \beta) + ktY = 0,$$

$$C^2\gamma + t(z' - \gamma) + ktZ = 0.$$

En éliminant k et t entre ces équations, il vient

$$\begin{vmatrix} A^2x & B^2\beta & C^2\gamma \\ X & Y & Z \\ \alpha - x' & \beta - y' & \gamma - z' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & (B^2 - C^2)X\beta\gamma + (C^2 - A^2)Y\gamma\alpha + (A^2 - B^2)Z\alpha\beta \\ & + A^2\alpha(Yz' - Zy') + B^2\beta(Zx' - Xz') \\ & + C^2\gamma(Xy' - Yx') = 0, \end{aligned}$$

équation d'un hyperboloïde équilatère, qui contient la droite D et passe par l'origine.

Pour que cet hyperboloïde soit de révolution, il faut qu'on ait

$$\pm(B^2 - C^2)X = \pm(C^2 - A^2)Y = \pm(A^2 - B^2)Z,$$

équation de quatre directions fixes.

L'hyperboloïde, lieu des cubiques gauches C, sera donc de révolution quand le point M parcourra une droite parallèle à l'une de ces directions.

3° Si nous portons l'origine au point M, les équations qui déterminent les points M_1 , M_2 et M_3 deviennent

$$(3) \quad h^2yz + B^2y'z - C^2z'y = 0,$$

$$(4) \quad k^2zx + C^2z'x - A^2x'z = 0,$$

$$(5) \quad l^2xy + A^2x'y - B^2y'x = 0,$$

$$Axx' + Byy' + Czz' - S = 0,$$

où l'on a posé

$$h^2 = B^2 - C^2, \quad k^2 = C^2 - A^2, \quad l^2 = A^2 - B^2,$$

$$S = 1 - A^2x'^2 - B^2y'^2 - C^2z'^2.$$

L'équation générale des quadriques circonscrites au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ est alors de la forme

$$\begin{aligned} & \lambda(h^2yz + B^2y'z - C^2z'y) + \mu(k^2zx + C^2z'x - A^2x'z) \\ & + \nu(l^2xy + A^2x'y - B^2y'x) \\ & + (mx + ny + pz)(Axx' + Byy' + Czz' - S) = 0. \end{aligned}$$

Les conditions pour que cette quadrique soit une sphère sont

$$\begin{aligned} \Lambda m x' &= B n y' = C p z', \\ \lambda h^2 + B p y' + C n z' &= 0, \\ \mu k^2 + C m z' + A p x' &= 0, \\ \nu l^2 + A n x' + B m y' &= 0. \end{aligned}$$

On peut prendre pour la valeur commune des coefficients de x^2 , y^2 et z^2 l'expression $\Lambda B C x' y' z'$, et alors on a

$$\begin{aligned} m &= B C y' z', & n &= C A z' x', & p &= A B x' y'. \\ \lambda &= -\frac{\Lambda x' (B^2 y'^2 + C^2 z'^2)}{h^2}, \\ \mu &= -\frac{B y' (C^2 z'^2 + A^2 x'^2)}{k^2}, \\ \nu &= -\frac{C z' (A^2 x'^2 + B^2 y'^2)}{l^2}; \end{aligned}$$

et si l'on désigne par x_ω l'abscisse du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$, on aura

$$x_\omega = \frac{C l^2 (C^2 z'^2 + A^2 x'^2) - B k^2 (A^2 x'^2 + B^2 y'^2) + l^2 k^2 (1 - A x'^2 - B y'^2 - C z'^2)}{2 A l^2 k^2 x'};$$

les expressions de y_ω et de z_ω se déduiront de celle de x_ω par une simple permutation circulaire.

Si maintenant, dans l'équation qui précède, on remplace A, B et C par tA , tB et tC , respectivement, il vient

$$x_\omega = \frac{\left\{ t [C l^2 (C^2 z'^2 + A^2 x'^2) - B k^2 (A^2 x'^2 + B^2 y'^2) - l^2 k^2 (A^2 x'^2 + B^2 y'^2 + C^2 z'^2)] + l^2 k^2 \right\}}{2 t A l^2 k^2 x'}.$$

Donc, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ décrit une droite.

4° Cherchons maintenant le centre de gravité G de ce tétraèdre.

Si nous portons dans l'équation (5) les valeurs de y et de z tirées des équations (3) et (4), il vient

$$Axx' + \frac{B^3 y'^2 x}{A^2 x' + l^2 x} + \frac{C^3 z'^2 x}{A^2 x' - k^2 x} - S = 0;$$

et si x_1 , x_2 et x_3 sont les racines de cette équation et x_G l'abscisse du point G, on aura

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},$$

ou

$$x = \frac{A^3 x'^2 (l^2 - k^2) - B^3 k^2 y'^2 + C^3 l^2 z'^2 + l^2 k^2 (1 - A x'^2 - B y'^2 - C z'^2)}{4 \Lambda l^2 k^2 x'};$$

on obtiendrait y_G et z_G par une permutation circulaire.

Si, dans l'expression de x_G , on remplace A, B et C par tA , tB et tC , respectivement, il vient

$$x_G = \frac{t[A^3 x'^2 (l^2 - k^2) - B^3 k^2 y'^2 + C^3 l^2 z'^2 - l^2 k^2 (A x'^2 + B y'^2 + C z'^2)] + l^2 k^2}{4 t \Lambda l^2 k^2 x'};$$

on voit donc que le lieu du point G est aussi une droite.

On reconnaît immédiatement que l'expression $2x_G - x_\omega$ est indépendante de t ; donc, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, la droite ωG passe par un point fixe I et le point G est le milieu de ωI . En d'autres termes, le centre de l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre $MM_1 M_2 M_3$ est un point fixe.

Note. — Solution analogue par M. Gambey. M. Leinekugel, élève ingénieur hydrographe de la Marine, nous a envoyé une solution analytique et une solution géométrique d'une généralisation de cette même question. Nous donnerons sa solution géométrique dans le prochain numéro.