NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ CAZAMIAN

Remarques sur le théorème de Frégier

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 322-324

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__322_1>

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE FRÉGIER;

Par M. André CAZAMIAN.

Le théorème de Frégier n'est que la transformée, par polaires réciproques, de cette propriété élémentaire de la parabole : Le lieu des sommets des angles droits circonscrits est une droite, la directrice.

Il suffit de prendre pour conique directrice un cercle quelconque, de centre O. La transformée S de la parabole est une conique passant par le point O, et les cordes de cette conique, vues du point O, sous un angle droit, auront toutes, en commun, un point fixe M, pôle de la directrice, situé sur la perpendiculaire menée de O à la directrice, c'est-à-dire, comme on le voit facilement, sur la normale à la conique S au point O.

Si le centre O du cercle directeur est situé sur la directrice D, la polaire réciproque de la parabole est une hyperbole équilatère passant par le point O. Les cordes de cette conique, vues du point O sous un angle droit, devant passer par le pôle de D, lequel est à l'infini dans la direction perpendiculaire, seront toutes parallèles à la normale au point O à l'hyperbole équilatère.

Appelons *point de Frégier* le point fixe par lequel passent les cordes d'une conique vues d'un point M de la courbe sous un angle droit. Ce point occupe sur la normale une position remarquable. Lorsque les côtés de l'angle droit, pivotant autour du point M, sont parallèles aux axes de la conique, ces côtés forment un système de cordes supplémentaires de la conique : donc la droite AB, joignant leurs seconds points d'intersection avec la courbe, passera par le centre O.

Le point de Frégier I est à l'intersection du diamètre AB et de la normale en M. Soient P et Q les points de rencontre de cette normale avec les axes de la conique. Le faisceau O(MPIQ) est harmonique, puisque la parallèle MB au rayon OQ est partagée par les trois autres en deux parties égales : *le point de Frégier est donc, sur la normale, le conjugué harmonique du point* M, *par rapport aux points d'intersection de la normale avec les axes.*

Corollaires. — 1° Dans le cas de l'hyperbole équilatère, le point de Frégier relatif à un point M de la courbe est à l'infini sur la normale. Donc :

Le point d'incidence d'une normale à une hyperbole *équilatère est le milieu de la portion de normale comprise entre les axes.*

2° L'un des axes de la parabole est à l'infini. Il en résulte que :

Le point de Frégier relatif à un point M *d'une parabole est, sur la normale, à la même distance de l'axe que le point* M.