

ENRIQUE VALDÈS

Sur la strophoïde

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 243-263

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__243_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA STROPHOÏDE ;
PAR M. ENRIQUE VALDÈS.

Le relevé de quelques erreurs contenues dans le travail de M. Balitrand (*Nouvelles Annales*, novembre

1893) nous a conduit à rassembler dans cette Note quelques-unes des propriétés de la strophoïde; l'étude de cette courbe sera simplifiée par la connaissance de ses points remarquables.

En prenant pour origine le point double D, pour axe des y la parallèle Δ à l'asymptote réelle et pour axe des x la perpendiculaire à cette asymptote, l'équation de la strophoïde est

$$x^3 + xy^2 - ax^2 - 2bxy + ay^2 = 0,$$

et, pour abrégé, nous écrirons c^2 au lieu de $a^2 + b^2$.

1. L'asymptote réelle a pour équation

$$x + a = 0.$$

2. Les asymptotes isotropes

$$x + iy = a + bi,$$

$$x - iy = a - bi$$

se coupent en un point réel qui est le foyer singulier F de la strophoïde; son vecteur (droite qui joint ce point à l'origine) a pour équation

$$bx - ay = 0,$$

et ses coordonnées sont a et b .

3. Les coordonnées du foyer singulier vérifient l'équation de la strophoïde, d'où

THÉORÈME. — *La strophoïde passe par le foyer singulier.*

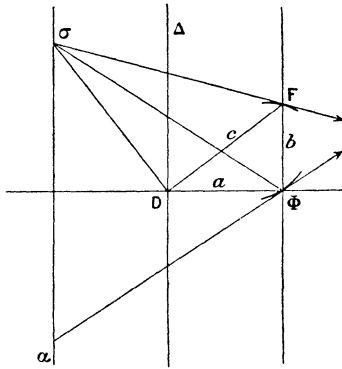
4. L'asymptote réelle rencontre la strophoïde en un point σ dont le vecteur a pour équation

$$ax + by = 0,$$

et dont les coordonnées sont $-a$ et $\frac{a^2}{b}$.

Pour obtenir le point σ , il suffit donc de joindre D à F et d'élever en D à DF la perpendiculaire qui rencontre l'asymptote réelle au point σ (*fig. 1*).

Fig. 1.



D'autre part, on sait que les *points de section* d'une cubique sont trois points en ligne droite; donc, puisque deux de ces points sont confondus en F (les asymptotes isotropes y passent toutes deux ainsi que la strophoïde), on voit que la droite σF est tangente à la strophoïde au point F; on a donc ces théorèmes :

THÉORÈME. — *L'asymptote réelle et le foyer singulier sont équidistants de la droite Δ .*

THÉORÈME. — *La droite σF qui joint le point de section au foyer singulier est vue du point double sous un angle droit et est tangente à la strophoïde au foyer singulier.*

5. Le cercle circonscrit au triangle asymptotique a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

(c'est le foyer singulier); il rencontre l'asymptote réelle

en deux points imaginaires conjugués, et les tangentes en ces points ont pour équations

$$x + iy = a + bi, \quad x - iy = \bar{a} - bi$$

(ce sont les asymptotes isotropes); les symédianes du triangle, issues de ces points, sont donc ces mêmes asymptotes isotropes et, puisque celles-ci se rencontrent au foyer singulier, nous pouvons énoncer le théorème suivant, déjà énoncé sous une forme plus générale (*Nouvelles Annales*, juin 1892) :

THÉORÈME. — *Le point de Lemoine du triangle asymptotique de la strophoïde coïncide avec son foyer singulier.*

6. Les coordonnées $x = a, y = 0$ vérifient l'équation de la strophoïde; d'où

THÉORÈME. — *La strophoïde passe par le point Φ , projection du foyer singulier sur la perpendiculaire abaissée du point double sur l'asymptote réelle.*

7. La tangente au point Φ a pour équation

$$ax - 2by - a^2 = 0;$$

elle rencontre l'asymptote réelle au point dont l'ordonnée est $-\frac{a^2}{b}$; d'où

THÉORÈME. — *La tangente au point Φ et la droite $\sigma\Phi$ font des angles égaux avec la droite $D\Phi$.*

8. Le tangentiel de Φ est un point τ , dont le vecteur a pour équation

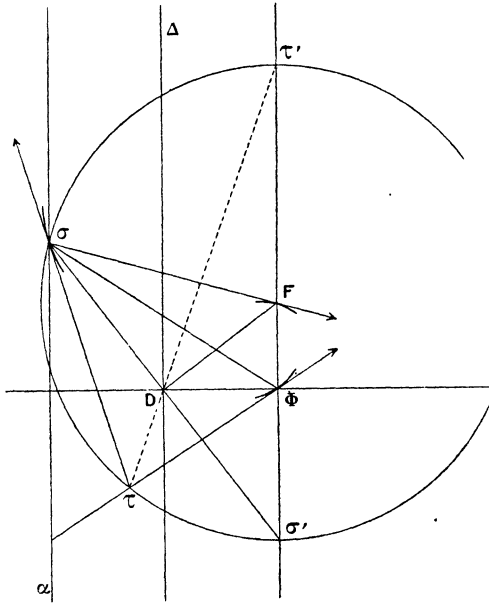
$$x(b^2 + c^2) - aby = 0;$$

d'autre part, la tangente au point de section σ a pour

équation (*fig. 2*)

$$a(a^2 + 3b^2)x + 2b^3y + a^2c^2 = 0,$$

Fig. 2.



et l'équation du vecteur du tangentiel de ce point est

$$(b^2 + c^2)x - aby = 0;$$

par suite, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les points σ et Φ ont le même tangentiel τ .*

9. Soit σ' le symétrique de σ par rapport au point double; le triangle isocèle $\sigma F \sigma'$ (*fig. 2*) montre que DF est la bissectrice de $\sigma F \sigma'$, que $D\tau$ est la bissectrice de $\alpha\sigma F$ et que

$$\sigma F = \sigma' F = \frac{c^2}{b};$$

le cercle de centre F et de rayon σF a donc pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - \frac{a^2 c^2}{b^2} = 0.$$

Les vecteurs des points communs à ce cercle et à la strophoïde ont pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 [a(b^2 + c^2)x^2 + 2b^3xy - ab^2y^2] = 0,$$

ce qui nous fait savoir en premier lieu que ce cercle est tangent à la strophoïde en chacun des points cycliques.

Si maintenant nous divisons

$$a(b^2 + c^2)x^2 + 2b^3xy - ab^2y^2$$

par $ax + by$ vecteur de σ , nous obtenons pour quotient

$$(b^2 + c^2)x - aby,$$

que nous reconnaissons être le vecteur du point τ . On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le cercle qui a pour centre le foyer singulier de la strophoïde et pour rayon la distance de ce point au point de section est tangent à la strophoïde en chacun des points cycliques et passe par le tangentiel commun à σ et à Φ .*

De là la détermination du point τ .

Ce cercle rencontre la droite $x = a$ en deux points dont les ordonnées sont

$$-\frac{a^2}{b} \quad \text{et} \quad \frac{b^2 + c^2}{b},$$

l'un est σ' , l'autre τ' est situé sur le vecteur de τ .

10. Le carré de la distance du point double à la droite $\sigma\Phi$ est $\frac{a^4}{a^2 + 2b^2}$: c'est aussi le carré de la distance

du point double à la droite $\sigma\tau$. D est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle $\sigma\tau\Phi$.

11. Le cercle de centre F et de rayon FD a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

Il rencontre la droite $x = a$ en deux points A et A' (fig. 3), dont les ordonnées sont $b \pm c$ et la droite $y = b$ en deux points B et B' dont les abscisses sont $a \pm c$.

Les droites DA et DA' ont pour équation

$$ax^2 + 2bxy - ay^2 = 0;$$

ce sont donc les tangentes au point double, et puisque

$$\frac{1}{2} \text{arc DA} = \widehat{\sigma\text{DA}} = \widehat{\Phi\text{DA}} :$$

THÉORÈME. — *Les tangentes au point double sont les bissectrices de l'angle $\Phi D\sigma$ et de l'angle $F D\Delta$.*

Les droites DB et DB' ont pour équation

$$bx^2 - 2axy - by^2 = [bx - (a + c)y][bx - (a - c)y] = 0.$$

Elles sont rectangulaires et rencontrent la strophoïde en deux points T et T' dont les coordonnées sont

$$T \begin{cases} x = c, \\ y = \frac{bc}{c + a}, \end{cases} \quad T' \begin{cases} x = -c, \\ y = \frac{bc}{c - a}. \end{cases}$$

On remarque que les tangentes en ces points sont parallèles à l'asymptote réelle, que la droite TT', dont l'équation est

$$ax + by - c^2 = 0,$$

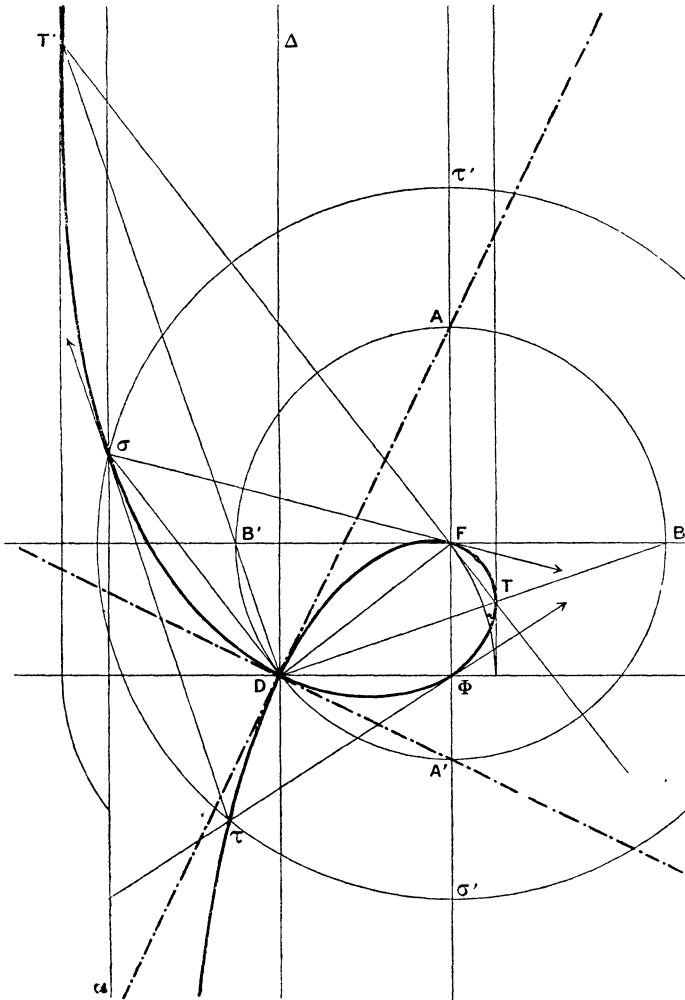
passe par le foyer singulier et est perpendiculaire à DF, enfin que

$$\frac{1}{2} \text{arc DB}' = \widehat{\sigma\text{DT}'} = \Phi\text{DT};$$

d'où

THÉORÈME. — *La droite qui joint les points où la*

Fig. 3.



tangente est parallèle à l'asymptote réelle passe par le foyer singulier, est perpendiculaire à DF et est vue du point double sous un angle droit.

THÉORÈME. — *Les droites DT et DT' sont également inclinées sur les tangentes au point double; elles rencontrent l'asymptote réelle en deux points dont σ est le milieu.*

(La seconde partie de ce théorème est due à M. S. Lattès, R. M. S., décembre 1892.)

12. L'angle $\sigma\tau\Phi$ double de $\sigma\tau\tau'$ a pour mesure $\text{arc}\sigma\tau'$ et est égal à l'angle $\sigma F\tau'$; par suite

THÉORÈME. — *Les quatre points F, σ , τ , Φ sont sur un cercle.*

13. Toute parallèle $x = \lambda$ à l'asymptote réelle rencontre la strophoïde en deux points à distance finie dont les coefficients vectoriels sont les racines de l'équation

$$(\lambda + a)t^2 - 2bt + \lambda - a = 0;$$

ils satisfont à la relation

$$bt_1 t_2 + a(t_1 + t_2) - b = 0;$$

d'où

THÉORÈME. — *Les vecteurs des points d'intersection de la strophoïde avec une parallèle à Δ sont également inclinés sur DT et DT' et, par suite, sur les tangentes au point double.*

Nous appellerons deux tels points : *points correspondants*.

14. Les sept points D, F, σ , τ , Φ , T, T' étant main-

tenant déterminés, nous allons aborder la très intéressante étude de M. Balitrand.

Prenons pour nouvel axe des x la tangente DA' et pour nouvel axe des y la tangente DA , de telle sorte que la nouvelle équation de la strophoïde est

$$(x^2 + y^2) \left[x \sqrt{\frac{c+b}{2c}} + y \sqrt{\frac{c-b}{2c}} \right] - 2cxy = 0,$$

et le nouveau coefficient angulaire d'une droite

$$- \sqrt{\frac{c+b}{c-b}} \left(\frac{am-b+c}{am-b-c} \right).$$

Ainsi les coefficients vectoriels de

$$\Delta \infty, \quad F, \quad \tau, \quad \tau, \quad \Phi, \quad T, \quad T',$$

qui étaient

$$\infty, \quad \frac{b}{a}, \quad -\frac{a}{b}, \quad \frac{b^2+c^2}{ab}, \quad 0, \quad \frac{b}{a+c}, \quad \frac{b}{a-c},$$

deviennent

$$-C, \quad C, \quad -\frac{1}{C}, \quad -C^3, \quad \frac{1}{C}, \quad 1, \quad -1$$

(en posant $\sqrt{\frac{c+b}{c-b}} = C$).

15. En considérant les points d'intersection de la strophoïde avec une droite, on obtient la proposition suivante :

Le produit des coefficients vectoriels de trois points collinéaires est constant et égal au coefficient angulaire de l'asymptote réelle

$$t_1 t_2 t_3 = -C \quad (\text{p. 432, relation 10}).$$

Réciproquement :

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de trois

points de la strophoïde est $-C$, ces trois points sont collinéaires.

Car, si par t_1 et t_2 on fait passer la droite $t_1 t_2$, qui rencontre de nouveau la strophoïde en t , on doit avoir $t_1 t_2 t = -C$; d'où

$$t_3 = t.$$

Ces deux propositions conduisent aux suivantes :

Lorsque deux points de la strophoïde sont correspondants, le produit de leurs coefficients vectoriels est égal à 1.

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de deux points de la strophoïde est égal à 1, ces deux points sont correspondants.

Lorsque deux points de la strophoïde sont en ligne droite avec le foyer singulier, leurs vecteurs sont rectangulaires.

Lorsque les vecteurs de deux points de la strophoïde sont rectangulaires, ces deux points sont en ligne droite avec le foyer singulier.

Lorsque deux points de la strophoïde sont en ligne droite avec σ , τ , Φ , T ou T' , le produit de leurs coefficients vectoriels est C^2 , $\frac{1}{C^2}$, $-C^2$, $-C$ ou C .

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de deux points de la strophoïde est C^2 , $\frac{1}{C^2}$, $-C^2$, $-C$ ou C , ces deux points sont en ligne droite avec σ , τ , Φ , T ou T' .

16. En considérant les points d'intersection non cycliques de la strophoïde avec un cercle, on obtient la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Le produit des coefficients vectoriels*

de quatre points concycliques est constant et égal au carré du coefficient angulaire de l'asymptote réelle

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = C^2 \quad (\text{p. 431, rectification de la relation 7}).$$

Réciproquement :

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de quatre points de la strophoïde est C^2 , ces quatre points sont concycliques.

Car, si par les trois points t_1, t_2, t_3 on fait passer le cercle $t_1 t_2 t_3$ qui rencontre de nouveau la strophoïde en t , on doit avoir $t_1 t_2 t_3 t = C^2$; d'où

$$t_4 = t.$$

De même que précédemment, ces deux propositions conduisent aux suivantes :

Lorsque trois points de la strophoïde sont concycliques avec F, σ, τ, Φ, T ou T' , le produit de leurs coefficients vectoriels est $C, -C^3, -\frac{1}{C}, C^3, C^2$ ou $-C^2$.

Lorsque le produit des coefficients vectoriels de trois points de la strophoïde est $C, -C^3, -\frac{1}{C}, C^3, C^2$ ou $-C^2$, ces trois points sont concycliques avec F, σ, τ, Φ, T ou T' .

THÉORÈME. — *Lorsque quatre points sont concycliques, si par chaque couple on fait passer un cercle, les deux cercles obtenus rencontrent la strophoïde en quatre nouveaux points qui sont concycliques (p. 437, 1^{er} théorème).*

17. POINTS CORRESPONDANTS.

THÉORÈME. — *Lorsque quatre points sont concycliques, les collinéaires de chaque couple sont des points correspondants.*

Car, de $t_1 t_2 t_3 t_4 = C^2$, $t_1 t_2 \theta_1 = -C$, $t_3 t_4 \theta_2 = -C$,
on déduit

$$\theta_1 \theta_2 = 1.$$

Toutes les démonstrations étant à peu près identiques, nous ne ferons qu'énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par le point double, la tangente au cercle en ce point passe par le correspondant ou collinéaire des deux autres points d'intersection de la strophoïde avec le cercle.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par un point et par le tangentiel de ce point, il rencontre la strophoïde en deux autres points qui sont en ligne droite avec le correspondant du premier.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par deux points collinéaires avec σ , il rencontre la strophoïde en deux points correspondants.*

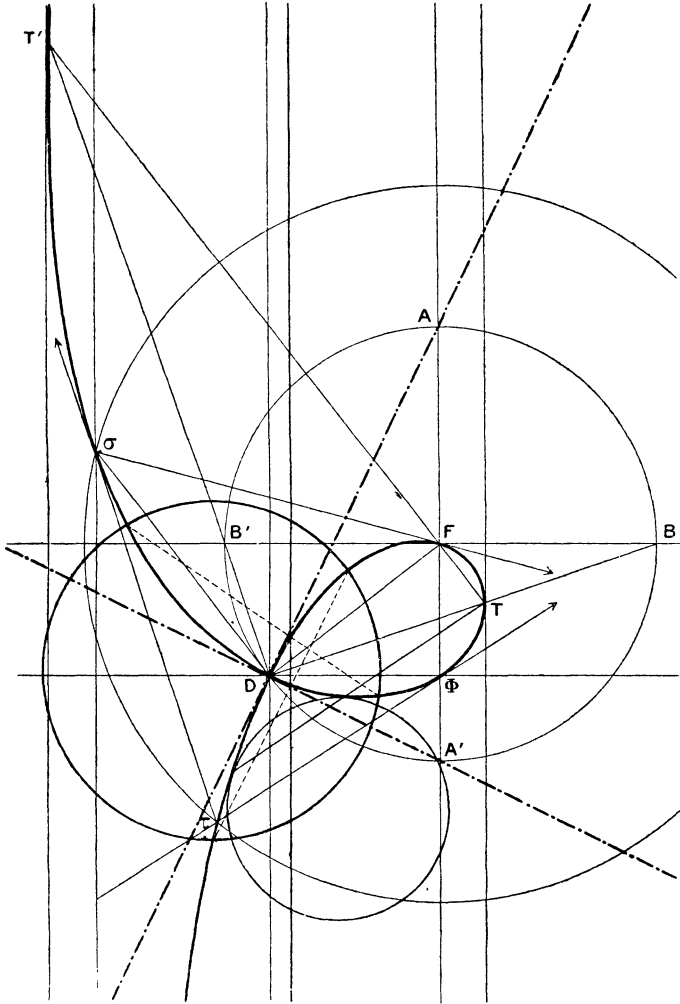
En particulier :

Lorsqu'un cercle passe par F et σ , ses deux autres points d'intersection avec la strophoïde sont en ligne droite avec Φ .

Lorsqu'un cercle passe par F' et T', ses deux autres points d'intersection avec la strophoïde sont en ligne droite avec T.

Lorsqu'un cercle passe par σ et τ , il rencontre la strophoïde en deux points correspondants.

Fig. 4.



Lorsqu'un cercle passe par T et T' , il rencontre la

strophoïde en deux autres points qui sont en ligne droite avec Φ .

(Les réciproques de ces propositions sont vraies.)

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par F , les tangentiels des trois autres points d'intersection avec la strophoïde sont en ligne droite.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par F et T , les tangentiels des deux autres points d'intersection avec la strophoïde sont deux points correspondants.*

18. CERCLES TANGENTS.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle est tangent à la strophoïde, les deux autres points d'intersection sont en ligne droite avec le correspondant du collinéaire du point de contact.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle est tangent à la strophoïde en F , il rencontre la courbe en deux autres points qui sont correspondants.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle est tangent à la strophoïde en F et passe par T , il est tangent en T ; inversement, s'il est tangent en T et passe par F , il est tangent en F . (De même pour T' .)*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par deux points collinéaires avec σ et par T , il est tangent en T (et de même pour T').*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle est tangent en F , les tangentiels des deux points d'intersection sont en ligne droite avec σ .*

19. CERCLES OSCULATEURS.

Lorsque trois des points communs à la strophoïde et à un cercle se confondent en M, le cercle est osculateur en ce point.

Si t et t_1 sont les coefficients vectoriels du point d'osculation et du quatrième point d'intersection, on a

$$t^3 t_1 = C^2.$$

Le collinéaire de t et t_1 et le tangentiel de t étant correspondants, on a la construction suivante du cercle osculateur en un point M de la strophoïde.

Mener la tangente en M et déterminer le tangentiel P de M, déterminer le correspondant P' de P, mener P'M, qui rencontre la strophoïde en N, enfin tracer le cercle tangent en M à MP et passant par N.

Au point double, il y a deux cercles osculateurs : l'un

$$x^2 - y^2 - \frac{2c}{a} [(b+c)x - ay] = 0$$

tangent à DA, l'autre

$$x^2 + y^2 + \frac{2c}{a} [(b+c)x - ay] = 0$$

tangent à DA'.

Le cercle osculateur en F passe par Φ .

20. Considérons trois points en ligne droite sur la strophoïde, de telle sorte que $t_1 t_2 t_3 = -C$; les cercles osculateurs en ces points rencontrent la strophoïde en trois autres points (θ_1) , (θ_2) , (θ_3) , et l'on a

$$t_1^3 \theta_1 = C^2, \quad t_2^3 \theta_2 = C^2, \quad t_3^3 \theta_3 = C^2,$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = -C^3.$$

Si donc à ces trois derniers points on adjoint le point σ ($\theta_4 = -\frac{1}{C}$), on obtient la relation

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 = C^2;$$

de là ce théorème :

THÉORÈME. — *Les cercles osculateurs en trois points collinéaires rencontrent la strophoïde en trois autres points concycliques avec σ .*

21. CERCLES TANGENTS.

Soient t_1 et t_2 les coefficients vectoriels des points de contact.

De $t_1^2 t_2^2 = C^2$, on déduit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La corde de contact d'un cercle bitangent à la strophoïde passe par l'un des points T ou T' (fig. 4).*

22. POINTS CONJUGUÉS.

Deux droites issues du point double et également inclinées sur les tangentes en ce point rencontrent la strophoïde en deux points C et C'. Avec M. Balitrand, nous dirons que C et C' sont conjugués.

Ainsi

$$F \text{ et } \Delta_\infty, \quad \sigma \text{ et } \Phi, \quad \tau \text{ et } G, \quad T \text{ et } T'$$

sont conjugués.

Il est facile de voir que deux points conjugués sont équidistants de Δ et ont même tangentiel (p. 432), et qu'un point de la strophoïde et le correspondant de son conjugué ont leurs vecteurs rectangulaires.

Réciproquement :

Deux points ayant même tangentiel sont conjugués (mais deux points de la strophoïde équidistants de Δ ne sont pas conjugués).

23. Si t , $-t$ et θ sont les coefficients vectoriels de deux points conjugués C et C' et de leur collinéaire K, on a la relation

$$t^2\theta = C;$$

l'équation de CC' est donc

$$t^2x + Cy - \frac{at^2}{1+t^2} = 0;$$

par suite, CC' est perpendiculaire à OK et enveloppe une certaine parabole, et la strophoïde est la podaire de cette parabole par rapport au point double.

THÉORÈME. — *Lorsque deux points sont conjugués, leur collinéaire et leur tangentiel sont aussi conjugués.*

THÉORÈME. — *Par deux points pris sur la strophoïde, on peut mener deux cercles tangents à la courbe; les points de contact sont deux points conjugués (p. 433, 2^e théorème).*

Si par deux points correspondants P et P' on mène à la strophoïde les tangentes PQ, PR, P'Q', P'R', les quatre points Q, R, Q', R' sont concycliques.

24. Les théorèmes suivants sont aussi évidents.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par le foyer singulier, il rencontre la strophoïde en trois autres points tels que deux d'entre eux et le conjugué du troisième sont en ligne droite.*

THÉORÈME. — *Lorsque trois points sont en ligne droite, le conjugué de l'un d'eux est sur le cercle qui passe par le foyer singulier et les deux autres.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par le foyer singulier, il rencontre la strophoïde en trois autres points dont les conjugués sont en ligne droite.*

THÉORÈME. — *Lorsque trois points sont en ligne droite, leurs conjugués et le foyer singulier sont sur un cercle.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un cercle passe par le foyer singulier, il détermine par ses intersections avec la strophoïde un triangle dont les côtés prolongés rencontrent la courbe en trois points en ligne droite.*

(Comparer avec les énoncés correspondants de M. Balttrand.)

GÉNÉRATIONS DE LA STROPHOÏDE.

1. Nous avons vu que, lorsque deux points de la strophoïde sont en ligne droite avec le foyer singulier, leurs vecteurs sont rectangulaires.

De là, on déduit la construction bien connue :

Tracer tous les cercles tangents en D à $D\Phi$ et joindre leurs centres au foyer singulier; les droites obtenues rencontrent leurs cercles respectifs en deux points qui appartiennent à la strophoïde.

2. Un cercle tangent en D à Δ rencontre la strophoïde en deux points dont le produit des coefficients vectoriels est C^2 ; ces deux points sont donc en ligne droite avec σ .

Mais reprenons nos axes primitifs.

Un cercle tangent en D à Δ a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2kx = 0;$$

la polaire de F par rapport à ce cercle a pour équation

$$x(a - k) + by - ak = 0,$$

et l'on reconnaît qu'elle passe par σ ; le lieu des points de contact des tangentes menées par F aux cercles tangents en D à Δ est la strophoïde; d'où

THÉORÈME. — Lorsqu'un cercle est tangent en D à Δ , les tangentes qu'on peut lui mener par le foyer singulier ont leurs contacts sur la strophoïde et la corde de contact passe par le point de section.

De là, la construction suivante :

Tracer tous les cercles tangents en D à Δ , joindre le foyer singulier à leurs centres et de σ abaisser les perpendiculaires sur les droites ainsi obtenues. Ces perpendiculaires rencontrent leurs cercles respectifs en deux points qui appartiennent à la strophoïde.

La construction précédente est de beaucoup préférable.

3. Nous avons vu (23) que la droite qui joint deux points conjugués C et C' est perpendiculaire à la droite qui joint leur collinéaire K au point double; si m est le coefficient vectoriel de K, l'équation de CC' est

$$am^2 - m(y - 2b) - x - a = 0.$$

et son enveloppe est la parabole

$$(y - 2b)^2 - 4a(x - a) = (x - 2a)^2 + (y - 2b)^2 - x^2 = 0.$$

Cette parabole a pour foyer le point f symétrique de D par rapport à F et pour directrice la droite Δ .

La strophoïde est, comme on le sait, la podaire de cette parabole.

4. M. Cazamian (*Nouvelles Annales*, octobre 1893) a démontré un très beau théorème sur la strophoïde et qui conduit à un grand nombre d'applications.

Il est facile de voir que les points A et B de M. Cazamian sont les points σ et Φ , et l'on peut énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *La droite MD, qui joint un point de la strophoïde au point double, est bissectrice de l'angle $\sigma M \Phi$.*

Le théorème de M. Cazamian permet de voir que la strophoïde est :

Le lieu des foyers des coniques tangentes en σ à $D\sigma$ et en Φ à $D\Phi$.

Le lieu des foyers des coniques tangentes à $D\sigma$ et à $D\Phi$ et ayant $\sigma\Phi$ pour directrice.

Le lieu des points de contact des tangentes menées par σ et Φ aux cercles ayant D pour centre.

Le lieu des pieds des normales abaissées du point double sur les coniques ayant deux points conjugués pour foyers, etc.

Remarque. — Deux points conjugués, leur collinéaire et le point de contact avec la parabole de la droite qui les joint, forment une division harmonique.

Consulter :

WEILL, *Sur les quadrilatères qui ont leurs six sommets sur une cubique* (*Nouvelles Annales*, septembre 1884).

ASTOR, *Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre* (*Nouvelles Annales*, juillet 1892).

CAZAMIAN, *Sur un lieu géométrique et ses applications* (*Nouvelles Annales*, octobre 1893).

BALITRAND, *Sur la strophoïde et la cissoïde* (*Nouvelles Annales*, novembre 1893).