

A.-E. PELLET

**Sur les équations réciproques et les
équations du quatrième degré**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 108-112

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__108_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES ET LES ÉQUATIONS
DU QUATRIÈME DEGRÉ ;**

PAR M. A.-E. PELLET.

1. Supposons que les racines d'une équation $f(x) = 0$ de degré $2m$ se partagent en m groupes de deux racines inégales x_1, x_2 , satisfaisant à la relation

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0.$$

On peut par une substitution linéaire ramener cette équation à être réciproque ou à ne contenir que des puissances paires de l'inconnue. Soit d'abord $a \neq 0$; posons $x = y + \beta$; les valeurs de y correspondant à x_1, x_2 satisfont à la relation

$$ay_1y_2 + (b + a\beta)(y_1 + y_2) + a\beta^2 + 2b\beta + c = 0,$$

qui se réduit à

$$ay_1y_2 + \frac{ac - b^2}{a} = 0.$$

pour $\beta = -\frac{b}{a}$. L'équation en y devient réciproque si l'on remplace y par

$$\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}} z,$$

et paire si l'on remplace y par

$$\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \frac{z + \gamma}{z - \gamma},$$

γ étant une quantité quelconque différente de 0; en effet, dans le premier cas on a la relation $z_1 z_2 = 1$, et dans le second cas $z_1 + z_2 = 0$.

Lorsque $a = 0$, l'équation $f(x) = 0$ devient paire en posant

$$x = y - \frac{c}{2b},$$

et réciproque en posant

$$x = \frac{y+1}{y-1} - \frac{c}{2b}.$$

2. Considérons une équation du quatrième degré, à coefficients réels

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

et soient x_1, x_2, x_3, x_4 ses quatre racines supposées inégales.

Les deux équations

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

$$ax_3x_4 + b(x_3 + x_4) + c = 0$$

déterminent les rapports des quantités a, b, c . a est nul si $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{p}{2}$; et alors la substitution $x = y - \frac{p}{4}$ transforme l'équation en une équation paire.

Supposons $x_1 + x_2$ différent de $-\frac{p}{2}$. Si x_1, x_2 sont des quantités imaginaires conjuguées, x_3, x_4 sont des quantités réelles ou imaginaires conjuguées, par suite les rapports des quantités a, b, c sont réels. Effectuons la substitution $x = y - \frac{b}{a}$; y_1, y_2 sont des quantités imaginaires conjuguées; leur produit, qui est égal à $\frac{b^2 - ac}{a^2}$, est donc positif; les deux substitutions

$$y = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} z, \quad y = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \frac{z + \gamma}{z - \gamma}$$

qui ramènent l'équation donnée à une équation réci-

proque ou à une équation paire sont donc réelles. Si les racines x_1, x_2 sont réelles ainsi que x_3 et x_4 , supposons-les rangées par ordre de grandeur,

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Après la substitution $x = y - \frac{b}{a}$, on a

$$y_1 y_2 = y_3 y_4 = -\frac{b^2 - ac}{a^2};$$

il en résulte que $\frac{b^2 - ac}{a^2}$ est positif. En effet, si le produit $y_1 y_2$ était négatif, les quantités y_1, y_2 seraient de signes contraires, y_1 négatif et y_2 positif, car on a

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4;$$

y_3, y_4 seraient tous deux positifs, ainsi que leur produit; et l'on aurait une contradiction.

Ainsi l'on peut, dans tous les cas, ramener une équation du quatrième degré, à coefficients réels, à être paire ou réciproque par une substitution linéaire à coefficients réels.

3. D'après ce qui précède, l'intégrale

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s}}$$

peut se ramener à la forme

$$\int \frac{F(y) dy}{\sqrt{Ay^4 + By^2 + C}}$$

de trois manières différentes par une substitution linéaire $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$; f et F désignent des fonctions rationnelles. Soit $F(y) = F_1(y^2) + F_2(y^2)y$; l'intégrale précédente se décompose en deux autres, l'une

d'elles $\int \frac{F_2(y^2)y dy}{\sqrt{Ay^4 + By^2 + C}}$ pouvant s'exprimer à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques, ce que l'on voit immédiatement en prenant y^2 pour variable; il peut se faire que l'autre $\int \frac{F_1(y^2) dy}{\sqrt{Ay^4 + By^2 + C}}$ puisse se ramener à la forme $\int \frac{F(z^2)z dz}{\sqrt{A_1z^4 + B_1z^2 + C_1}}$ par une substitution linéaire. Cette substitution, laissant sous forme paire l'équation $Ay^4 + By^2 + C$, est déterminée; on a

$$y = \sqrt{\alpha} \frac{z + \gamma}{z - \gamma},$$

α étant égal à $\pm \sqrt{\frac{C}{A}}$, et γ une indéterminée différente de 0.

Ainsi soit $\int \frac{(1-x^2)dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$, intégrale effectuée par Euler, en posant $p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$; en remplaçant x par $\frac{z+\gamma}{z-\gamma}$, elle devient

$$\int \frac{z dz}{(z^2 + \gamma^2)\sqrt{(z + \gamma)^4 + (z - \gamma)^4}};$$

et en remplaçant x par $\sqrt{\frac{z-\gamma}{z+\gamma}}$,

$$\int \frac{(z^2 + \gamma^2)\sqrt{z-\gamma} dz}{z\sqrt{(z + \gamma)^4 + (z - \gamma)^4}}.$$

On voit de même que l'intégrale

$$\int \frac{f(x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ou

$$f(x^2) = F\left(r^2 + \frac{1}{k^2x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{k^2x^2}\right),$$

F désignant une fonction rationnelle, se ramène à l'in-

tégrale d'une fonction rationnelle en posant

$$x = \sqrt{\frac{1}{\pm k} \frac{z + \gamma}{z - \gamma}},$$

puis

$$z^2 = t;$$

cette intégrale a été considérée par M. Hermite (Cours de la Sorbonne).

En général soit $\varphi(x) = 0$ une équation de degré $2m$, dont les racines peuvent se partager en m groupes de deux racines satisfaisant à une relation de la forme

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0;$$

l'intégrale

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

pourra se ramener par une transformation linéaire

$$x = \frac{\alpha\gamma + \beta}{\gamma\gamma' + \delta}$$

$$\int \frac{f_1(y) dy}{\sqrt{\psi(y^2)}},$$

$\psi(y^2)$ étant une fonction entière et de degré m en y^2 , $f_1(y)$ une fonction rationnelle de y en même temps que $f(x)$. Posons

$$y^2 = t, \quad f_1(y) = F(y^2) + F_1(y^2)y;$$

il vient

$$\int \frac{f_1(y) dy}{\sqrt{\psi(y^2)}} = \int \frac{F_1(t) dt}{2\sqrt{\psi(t)}} + \int \frac{F(t) dt}{2\sqrt{t}\sqrt{\psi(t)}},$$

et l'intégrale proposée est ramenée à d'autres de même forme, la racine carrée portant sur un polynôme de degré inférieur. En particulier, si $\varphi(x) = 0$ est une équation du sixième degré, $\psi(t)$ et $t\psi(t)$ sont des polynômes du troisième et du quatrième degré et l'on est ramené aux fonctions elliptiques.