NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GODEFROY

Construction du centre de courbure de certaines courbes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 85-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__85_0>

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE CERTAINES COURBES;

PAR M. R. GODEFROY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Considérons une courbe quelconque rapportée à un systèmes d'axes rectangulaires xOy. En un point $A(x, y)$ de la courbe, le centre de courbure est C; la normale AC rencontre Ox au point $B(X, o)$ sous l'angle α; les perpendiculaires en B et C à Ox et à AC se coupent au point M.

On a

$$\frac{BM}{CA} = \frac{d(B)}{d(A)},$$

mais

$$BM = \frac{CB}{\sin\alpha},$$

$$d(B) = dX,$$

$$d(A) = \frac{dx}{\sin\alpha};$$

ces valeurs, portées dans la formule ci-dessus, la transforment en celle-ci

$$\frac{CB}{CA} = \frac{dX}{dx}\sin^2\alpha,$$

dont nous allons faire usage.

Les courbes que nous avons en vue sont celles dont les distances r, r' d'un quelconque de leurs points à un point fixe O et à une droite fixe PQ sont liées par la relation

$$\frac{r^m}{r'^n} = \text{const.}.$$

m et n étant quelconques.

Prenons respectivement pour axes de coordonnées Ox et Oy la perpendiculaire et la parallèle à PQ, menées par le point O.

Conservons d'ailleurs les notations du lemme.

On aura

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$r' = x + a,$$

et l'équation de la courbe pourra toujours se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 - K(x + a)^p = 0.$$

On a ici

$$X = \frac{pKy(x + a)^{p-1}}{2y} = \frac{pK(x + a)^{p-1}}{2};$$

la formule

$$\frac{CB}{CA} = \frac{dX}{dx}\sin^2\alpha$$

deviendra

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2}K(x + a)^{p-2}\sin^2\alpha;$$

mais, de l'équation de la courbe, on tire

$$K(x + a)^{p-2} = \frac{x^2 + y^2}{(x + a)^2};$$

or

$$\frac{x^2 + y^2}{(x + a)^2} = \frac{r^2}{r'^2},$$

donc

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2}\,\frac{\dfrac{r^2}{r'^2}}{\sin^2\alpha}.$$

Soit l la longueur du segment de la tangente compris entre son point de contact A et son point de rencontre T avec PQ, on a

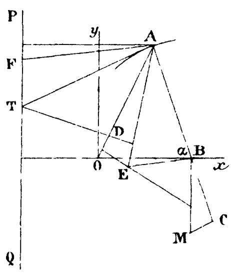
$$\frac{r'^2}{\sin^2\alpha} = l^2,$$

par suite

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2}\frac{r^2}{l^2}.$$

Cette relation conduit à la construction suivante :

Prendre sur AO le segment $AD = \sqrt{\frac{p(p-1)}{2}}\,r$; joindre TD, mener du point A la droite AE perpendiculaire à TD jusqu'en E, où elle rencontre la droite BE



parallèle à AF. Cette dernière est symétrique de AE par rapport à la bissectrice de l'angle OAT. La perpendiculaire à AO menée du point E rencontre la normale AB au centre de courbure C.

En effet, les triangles CBE, CEA sont tous deux semblables au triangle ADT.

Il en résulte les proportions

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CE}{CA} = \frac{AD}{AT};$$

d'où

$$\frac{CB}{CA} = \frac{AD^2}{AT^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2}\frac{r^2}{l^2}.$$

Cette construction est la généralisation d'une construction bien connue du centre de courbure des sections coniques.