BALITRAND

Construction du cercle osculateur en un point d'une hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 451-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__451_1>

CONSTRUCTION DU CERCLE OSCULATEUR EN UN POINT D'UNE HYPERBOLE;

PAR M. BALITRAND,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y) \equiv A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F \\ \qquad \equiv \varphi(x, y) + 2 D x + 2 E y + F = 0 \end{cases}$$

l'équation d'une hyperbole Σ. Nous nous proposons de construire le cercle osculateur en un point M de cette hyperbole. Désignons par P et P_1 les premiers membres des équations de la tangente au point M et d'une autre droite passant par ce point. L'équation du cercle osculateur sera de la forme

$$(2)\qquad S = \varphi(x, y) + 2 D x + 2 E y + F + P P_1 = 0$$

On en déduit

$$(3) \qquad S - 2Dx - 2Ey - F \equiv \varphi(x, y) + PP_1.$$

Or le premier membre de cette identité représente un cercle, le second représente aussi un cercle et celui-ci se détermine facilement, puisqu'il passe par les quatre points d'intersection des droites qui ont pour équation

$$(4) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad P = 0, \qquad P_1 = 0.$$

La droite P_1 est partiellement inconnue, mais sa détermination s'achève précisément par ce fait, que, puisque les points d'intersection des droites (4) sont sur un cercle, les droites P et P_1 sont antiparallèles par rapport aux directions asymptotiques de l'hyperbole Σ.

Nous pouvons donc construire le cercle qui a pour équation

$$(5) \qquad S - 2Dx - 2Ey - F = 0.$$

Mais ce cercle et le cercle osculateur $S = 0$ ont pour axe radical la droite

$$(6) \qquad 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

qu'il est facile de construire. En effet, la polaire de l'origine par rapport à Σ a pour équation

$$Dx + Ey + F = 0.$$

Cette polaire et la droite (6) sont parallèles et leurs distances à l'origine sont dans le rapport de $\frac{1}{2}$.

On arrive donc à la règle suivante pour obtenir le cercle osculateur en un point M d'une hyperbole déterminée d'une façon quelconque :

Construire les directions asymptotiques de l'hyperbole et la tangente au point M; *mener par le point* M *la droite antiparallèle à la tangente par rapport aux* *directions asymptotiques et tracer le cercle* C *circonscrit au quadrilatère ainsi obtenu; prendre la droite* Δ *parallèle à la polaire de l'origine par rapport à* Σ *et située à mi-distance entre cette polaire et l'origine; enfin tracer le cercle passant par* M *et ayant pour axe radical avec le cercle précédent la droite* Δ, *c'est le cercle osculateur.*

Si l'on suppose que l'origine soit au centre de la courbe, que, par suite, les asymptotes de la conique coïncident avec les directions asymptotiques et que l'équation de l'hyperbole soit

$$\varphi(x, y) + \mathrm{F} = 0,$$

on voit que le cercle osculateur et le cercle C sont concentriques.

Cas de la parabole. — Dans le cas d'une parabole, $\varphi(x, y)$ est un carré parfait

$$\varphi(x, y) \equiv (ax + by)^2,$$

et l'équation (3) devient

$$\mathrm{S} - 2\,\mathrm{D}x - 2\mathrm{E}y - \mathrm{F} \equiv (ax + by)^2 + \mathrm{PP}_1. \tag{7}$$

La construction indiquée dans le cas de l'hyperbole subsiste avec une modification évidente.

Prenons le cas d'une parabole tangente aux axes Ox et Oy aux points A et B. La direction de l'axe de la parabole s'obtient en joignant le point O au milieu I de AB. Cette droite OI coupe la parabole au point K. La tangente au point K est précisément la droite Δ. Le centre du cercle C s'obtient en abaissant du point A une perpendiculaire sur OI et en élevant une perpendiculaire à Ox au point A; en prenant l'intersection de ce cercle et de la tangente au point K, on a deux points du cercle osculateur en A à la parabole. Même construction pour le point B.