NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BALITRAND

Sur la strophoïde et la cissoïde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 430-451

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__430_1>

SUR LA STROPHOÏDE ET LA CISSOÏDE;

PAR M. BALITRAND,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

La strophoïde oblique est une cubique caractérisée par les propriétés de passer par les points circulaires de l'infini et de posséder un nœud à tangentes rectangulaires. Si nous prenons comme axes coordonnés les tangentes au point double, l'équation de la strophoïde est

$$(1) \qquad (y + cx)(x^2 + y^2) - axy = 0$$

L'asymptote réelle de la courbe a pour coefficient angulaire $-c$. La droite qui a pour équation

$$y - cx = 0$$

rencontre la strophoïde en un point S tel que $OS = \frac{a}{2}$. Nous dirons que cette droite OS est l'axe de la strophoïde, quoique ce ne soit pas un axe au sens géométrique du mot, et nous désignerons la parallèle à l'asymptote menée par le point double sous le nom de *droite* Δ.

En posant $y = tx$, on arrive à exprimer les coordonnées d'un point de la courbe au moyen des formules

$$(2) \qquad x = \frac{at}{(c+t)(1+t^2)}, \qquad y = \frac{at^2}{(c+t)(1+t^2)}.$$

L'équation de la droite qui joint les deux points (t_1).

(t_2) est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ at_1 & at_1^2 & c + t_1 + ct_1^2 + t_1^3 \\ at_2 & at_2^2 & c + t_2 + ct_2^2 + t_2^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant se met sous la forme suivante, après avoir divisé par $t_1 - t_2$,

$$(3) \quad \begin{cases} [c(t_1 + t_2) + t_1 t_2 - t_1^2 t_2^2]x \\ \quad + [-c + ct_1 t_2 + t_1 t_2(t_1 + t_2)]y - at_1 t_2 = 0; \end{cases}$$

l'équation de la tangente au point (t), qui s'obtient en faisant $t_1 = t_2$ dans l'équation précédente, est donc

$$(4) \quad (2ct + t^2 - t^4)x + (-c + ct^2 + 2t^3)y - at^2 = 0.$$

Si nous considérons un cercle quelconque du plan dont l'équation soit

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

l'équation qui donne les valeurs du paramètre t pour les points d'intersection du cercle et de la strophoïde est

$$(6) \quad \begin{cases} \gamma t^4 + 2(\gamma c - a\beta)t^3 \\ \quad + (\gamma + \gamma c + a^2 - 2a\alpha - 2ac\beta)t^2 \\ \qquad - 2c(\gamma - a\alpha)t + \gamma c = 0. \end{cases}$$

Entre ces paramètres existe la relation

$$(7) \qquad t_1 t_2 t_3 t_4 = c.$$

De même l'équation qui donne les valeurs du paramètre t pour les points d'intersection de la strophoïde et de la droite représentée par l'équation

$$(8) \qquad ux + vy - 1 = 0$$

est

$$(9) \qquad t^3 + (c - av)t^2 + (1 - au)t + c = 0$$

et l'on a encore la relation

$$(10) \qquad t_1 t_2 t_3 = -c.$$

D'un point γ pris sur la strophoïde, on peut mener deux tangentes γB, γC à cette courbe; les paramètres des points de contact sont donnés par la relation

$$t_1 \theta^2 = -c:$$

ils sont égaux, mais de signes contraires; de sorte que les droites OB, OC sont symétriques par rapport à Ox; c'est-à-dire qu'elles forment un faisceau harmonique avec les tangentes au point double. Réciproquement, deux droites OB et OC, symétriques par rapport à Ox, rencontrent la strophoïde en deux points tels que les tangentes en ces points se coupent en un point γ de la strophoïde. On peut encore observer que les points B et C sont équidistants de la droite Δ; nous dirons que les points B et C sont conjugués.

Le point double est le centre du cercle inscrit au triangle γBC; c'est-à-dire que $O\gamma$ est la bissectrice de l'angle $B\gamma C$ (*Journal de Math. spéc.*, 1887, p. 269).

Prenons quatre points de la strophoïde A, B, C, D, situés sur un cercle, points que nous appellerons *concycliques*, et soient t_1, t_2, t_3, t_4 les valeurs du paramètre t pour ces points. La droite AB rencontre la strophoïde en un troisième point $P(\theta_1)$ et la droite CD en un troisième point $Q(\theta_2)$. Les relations (7) et (10) donnent

$$t_1 t_2 \theta_1 = -c, \qquad t_3 t_4 \theta_2 = -c;$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 = c.$$

Or, si nous adjoignons à ces deux points le point $(\theta_3) = -1$, on a

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = -c,$$

c'est-à-dire que ces trois points sont en ligne droite; et l'on vérifie aisément, au moyen de la formule (4), que le point $(\theta_3) = -1$ est celui où la tangente à la strophoïde est parallèle à l'asymptote de cette courbe. Ce point est également sur la seconde bissectrice des axes. On a donc ce théorème :

Théorème. — *Si quatre points* A, B, C, D *d'une strophoïde sont sur un cercle, les droites* AB *et* CD *rencontrent la strophoïde en deux points* P *et* Q *en ligne droite avec le point où la tangente est parallèle à l'asymptote, ou encore avec le point situé sur la seconde bissectrice des axes.*

Ce théorème peut servir pour l'étude des groupes de points concycliques sur la strophoïde, mais les formules (7) et (10) sont aussi commodes et permettent en outre de faire la distinction du réel et de l'imaginaire. Ce théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Si autour de deux points fixes P *et* Q, *pris sur la strophoïde, et en ligne droite avec le point où la tangente est parallèle à l'asymptote, on fait pivoter deux droites* PAB, QCD, *les quatre points* A, B, C, D *sont constamment sur un cercle.*

Supposons que le cercle varie en passant par les deux points fixes A et B, la droite CO pivotera autour du point fixe Q. Puisque du point Q on peut mener deux tangentes à la strophoïde, il y a deux positions du cercle pour lesquelles il devient tangent à la strophoïde; les deux points de contact sont conjugués, c'est-à-dire équidistants de la droite Δ.

Théorème. — *Par deux points fixes pris sur la* *strophoïde, on peut faire passer deux cercles tangents à la courbe; les points de contact sont deux points conjugués.*

Supposons maintenant que, le point A restant fixe, le point B se déplace sur la strophoïde. A chaque position du point B, correspondent deux points de contact; donc, en vertu du principe de correspondance, il y a trois positions pour lesquelles le point B se confond avec l'un des points de contact, c'est-à-dire trois positions pour lesquelles le cercle tangent devient osculateur à la strophoïde. La formule (7) nous montre de plus qu'un de ces cercles est réel, les deux autres étant imaginaires; elle nous montre aussi que le point fixe et les points d'osculation sont sur un cercle. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Par un point pris sur la strophoïde, on peut faire passer trois cercles osculateurs à cette courbe. Un cercle est réel, les deux autres sont imaginaires; le point fixe et les points d'osculation sont sur un cercle.*

Le cercle osculateur en un point M à la strophoïde coupe cette courbe en un autre point μ, et la détermination du cercle osculateur revient évidemment à celle du point μ.

Or, si nous considérons la tangente au point M, elle coupe la strophoïde en un autre point, et d'après notre premier théorème, ce point et le point où la ligne $M\mu$ rencontre la strophoïde sont en ligne droite avec le point où la tangente est parallèle à l'asymptote. Par conséquent la détermination du point μ, c'est-à-dire celle du cercle osculateur, revient au problème suivant ou à des cas particuliers du problème suivant :

Connaissant deux des points d'intersection A *et* B *d'une droite et de la strophoïde, trouver le troisième point* C.

La solution de ce problème résulte de la formule qui lie les paramètres de trois points en ligne droite

$$t_1 t_2 t_3 = -c,$$

formule dans laquelle c désigne le coefficient angulaire de l'axe de la strophoïde, t_1 et t_2 les coefficients angulaires des droites qui joignent le point double aux points d'intersection connus et t_3 le coefficient angulaire de la droite qui va au point d'intersection cherché C.

La relation $t_1 t_2 t_3 = -c$ pouvant s'écrire

$$t_1 t_2 = cx$$

en posant $-\frac{1}{t_3} = x$ conduit à la construction suivante qu'il suffit d'énoncer :

D'un point P *pris arbitrairement sur* Ox, *élever à* Ox *une perpendiculaire qui coupe* OA, OB *et l'axe de la strophoïde en* A′, B′, D′. *Rabattre* PD′, PB′ *sur* Ox, *en* α' *et* β', *joindre* A′α' *et par* β' *mener une parallèle à* A′α' *qui coupe* PA′B′ *en* C′. *La perpendiculaire à* OC′ *passe par le point cherché* C.

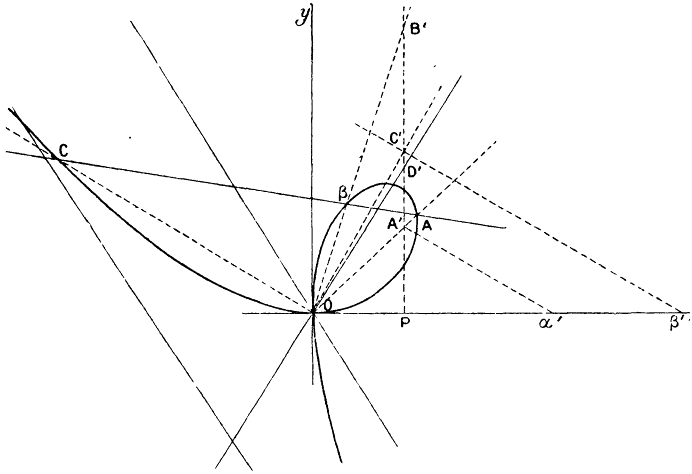
Les relations (7) et (10) conduisent à une foule de théorèmes sur la strophoïde; mais, comme leur énoncé et leur démonstration ne présentent aucune difficulté, nous nous bornerons à démontrer les plus simples.

Si l'on prend quatre points concycliques sur la strophoïde, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = c,$$

on voit que les cercles osculateurs en ces points coupent la strophoïde en quatre nouveaux points, dont les

Fig. 1.



paramètres sont donnés par les relations

$$t_1^3\theta_1 = c, \qquad t_2^3\theta_2 = c, \qquad t_3^3\theta_3 = c, \qquad t_4^3\theta_4 = c;$$

d'où

$$\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 = c.$$

Par suite

Théorème. — *Les cercles osculateurs en quatre points concycliques coupent la strophoïde en quatre nouveaux points également concycliques.*

Si l'on prend sur la strophoïde quatre points concycliques, on a

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = c.$$

Si par les points (t_1) et (t_2) on fait passer un cercle qui coupe la courbe aux points (θ_1) et (θ_2) et par les points (t_3) et (t_4) un autre cercle qui la coupe aux points (θ_3) et (θ_4), on a

$$t_1 t_2 \theta_1 \theta_2 = c, \qquad t_3 t_4 \theta_3 \theta_4 = c;$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 = c.$$

Ainsi :

THÉORÈME. — *Si l'on coupe une strophoïde par un cercle quelconque, que par deux des points d'intersection on fasse passer un cercle et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles coupent la strophoïde en quatre nouveaux points situés sur un cercle.*

Penons trois points (t_1), (t_2), (t_3) sur une droite. Les cercles osculateurs en ces points coupent la strophoïde en trois nouveaux points tels que l'on a

$$t_1^2 \theta_1 = c, \qquad t_2^2 \theta_2 = c, \qquad t_3^2 \theta_3 = c;$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = c.$$

Or nous savons que les deux points (θ) et $(-\theta)$ sont deux points conjugués. La relation précédente pouvant s'écrire

$$\theta_1 \theta_2 (-\theta_3) = -c,$$

on a ce théorème :

THÉORÈME. — *Les cercles osculateurs à la strophoïde en trois points en ligne droite coupent cette courbe en trois nouveaux points tels que deux quelconques de ces points et le conjugué du troisième sont en ligne droite.*

Ce théorème est analogue au théorème classique sur les tangentiels de trois points en ligne droite que l'on peut encore rapprocher du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les tangentes à la strophoïde en* *quatre points situés sur un cercle, coupent la courbe en quatre nouveaux points également situés sur un cercle.*

Nous venons de rencontrer le groupe de points défini par la relation

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = c$$

et d'en donner une définition géométrique au moyen des cercles osculateurs à la strophoïde en trois points en ligne droite. On peut en donner une définition géométrique différente et un peu plus simple. En effet, si nous leur adjoignons le point $(\theta_4) = 1$, qui correspond évidemment au point situé sur la première bissectrice, les quatre points (θ_1), (θ_2), (θ_3), (θ_4) sont sur un cercle. Nous appellerons le point $(\theta_4) = 1$ le sommet de la strophoïde, quoique ce ne soit pas un sommet géométrique; et nous pourrons alors énoncer le théorème suivant, qui ne diffère que par la forme de notre avant-dernier théorème :

Théorème. — *Un cercle passant par le sommet de la strophoïde coupe cette courbe en trois autres points* A, B, C, *tels que deux quelconques de ces points,* A *et* B *par exemple et le conjugué* γ *du troisième* C, *sont en ligne droite.*

La réciproque de ce théorème est vraie. On peut ajouter :

Les trois points α, β, γ *sont en ligne droite.*

Réciproquement, *si trois points sont en ligne droite, leurs conjugués forment un triangle tel que le cercle circonscrit à ce triangle passe par le sommet de la strophoïde.*

Ce résultat peut encore s'énoncer :

Théorème. — *Un cercle passant par le sommet de la strophoïde détermine par ses intersections avec cette courbe un triangle* ABC, *tel que les côtés* BC, CA, AB *prolongés coupent cette courbe en trois points* α, β, γ *en ligne droite. Les points* A *et* α, B *et* β, C *et* γ *sont conjugués.*

Les points A, B, C, α, β, γ forment un quadrilatère complet inscrit dans la strophoïde, que nous appellerons *quadrilatère conjugué inscrit,* puisque chaque sommet est le conjugué du sommet qui lui est opposé. La première question qui se présente est de savoir si tout quadrilatère complet inscrit dans la strophoïde est conjugué. Pour le voir prenons sur la strophoïde trois points $\alpha(t_1)$, $\beta(t_2)$, $\gamma(t_3)$ en ligne droite et construisons un quadrilatère complet inscrit. Par le point α menons une droite αBC, qui coupe la strophoïde aux points $B(\theta_2)$ et $C(\theta_3)$ et joignons βC qui coupe la strophoïde au point $A(\theta_1)$; enfin les points A et B étant supposés en ligne droite avec γ, tirons γAB. On a

$$t_1 t_2 t_3 = -c,$$

puis

$$t_1\theta_2\theta_3 = -c, \qquad t_2\theta_3\theta_1 = -c, \qquad t_3\theta_1\theta_2 = -c;$$

d'où

$$\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2 = c^2,$$

par suite

$$\theta_1\theta_2\theta_3 = \pm c.$$

En prenant le signe $-$, on a évidemment les tangentiels des trois points α, β, γ en ligne droite qui forment un quadrilatère conjugué inscrit dégénéré, puisque les six points sont sur deux droites. En prenant le signe $+$, on a trois points qui forment avec α, β, γ un quadrilatère conjugué inscrit véritable. On a donc ce théorème :

THÉORÈME. — *Tout quadrilatère complet inscrit à la strophoïde est un quadrilatère conjugué inscrit, soit dégénéré, soit véritable.*

Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ont pour équations

$$t_1^2(1+t_1^2)x + c(1+t_1^2)y + t_1^2 = 0, \tag{11}$$

$$t_2^2(1+t_2^2)x + c(1+t_2^2)y + t_2^2 = 0, \tag{12}$$

$$t_3^2(1+t_3^2)x + c(1+t_3^2)y + t_3^2 = 0, \tag{13}$$

et les paramètres t_1, t_2, t_3 sont liés par la relation

$$t_1 t_2 t_3 = c.$$

La droite $A\alpha$ rencontre la strophoïde en un troisième point a dont le paramètre est donné par la formule

$$\theta_1 = \frac{c}{t_1^2},$$

et le coefficient angulaire de la droite $A\alpha$ est précisément $-\frac{t_1^2}{c}$, de sorte que les droites $O\alpha$ et $A\alpha$ sont rectangulaires. Il en est de même pour les droites Ob et $B\beta$, Oc et $C\gamma$.

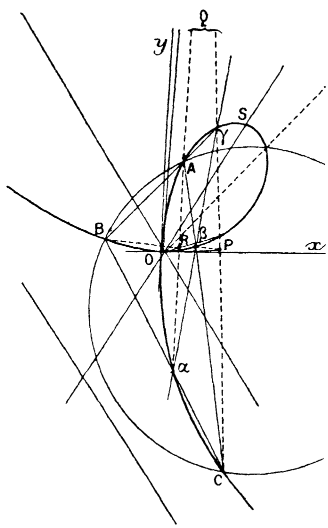
Au moyen des équations (12) et (13) on arrive facilement à trouver l'équation de la droite qui va du point double au point de rencontre des droites $B\beta$ et $C\gamma$; on trouve précisément

$$y - \frac{c}{t_1^2}x = 0,$$

c'est la droite Oa. Ainsi les droites Oa, Ob, Oc sont les hauteurs du triangle des diagonales PQR du quadrilatère complet. De ce qui précède résulte la construction de la strophoïde circonscrite à un quadrilatère complet.

En général, il n'est pas possible de circonscrire une strophoïde à un quadrilatère complet et nous trouverons plus loin la condition que doivent vérifier les six sommets ou plutôt les quatre côtés du quadrilatère pour que cela soit possible. Mais on peut toujours, par les six sommets, faire passer une cubique circulaire uni-

Fig. 2.



cursale, puisque cette cubique qui satisfait déjà à trois conditions linéaires, savoir de passer par les points cycliques et de présenter un point double, est déterminée linéairement par les six sommets du quadrilatère. Si le quadrilatère est choisi de telle façon que cette cubique soit une strophoïde, sa détermination est immédiate. En effet, le centre des hauteurs du triangle des diagonales est le point double de la strophoïde. La droite qui joint les milieux des diagonales ou médiane du quadrilatère, est parallèle à l'asymptote. Les cercles circonscrits aux triangles formés en prenant trois par trois les côtés du quadrilatère passent par un même point. C'est le point que nous avons appelé le sommet de la strophoïde et l'asymptote de la courbe passe par le point symétrique du sommet par rapport à la droite qui joint les milieux des diagonales. La strophoïde est complètement déterminée.

On peut remarquer que le sommet de la strophoïde est le foyer de la parabole tangente aux quatre droites.

Si nous considérons le quadrilatère complet A, B, C, α, β, γ et le faisceau des coniques tangentes à ces quatre côtés et si du point double de la strophoïde nous menons des tangentes à ces coniques, le lieu des points de contact est, comme on le sait, une cubique présentant un point double au point fixe par où l'on mène les tangentes. Cette cubique passe par les six sommets du quadrilatère complet et par les points où les droites qui joignent le point fixe aux sommets du triangle des diagonales coupent ces diagonales. Cette cubique coïncide donc avec la strophoïde.

Considérons encore un quadrilatère quelconque et cherchons la courbe, lieu des foyers des coniques tangentes aux quatre côtés du quadrilatère. On sait que c'est une cubique passant par les points circulaires de l'infini, par les six sommets du quadrilatère et par les pieds des hauteurs du triangle des diagonales. L'asymptote réelle est parallèle à la médiane du quadrilatère, et l'on voit aisément qu'elle passe par le point symétrique, par rapport à la médiane du quadrilatère, du foyer de la parabole tangente aux quatre côtés. Lorsque le quadrilatère est circonscriptible à un cercle, cette courbe présente un point double à tangentes rectangulaires au centre du cercle. C'est une strophoïde (Picquet, *Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques*, p. 123).

Ce qui précède peut se résumer ainsi :

THÉORÈME. — *Pour qu'un quadrilatère soit inscriptible dans une strophoïde, il faut et il suffit que les quatre côtés du quadrilatère touchent un cercle.*

Le centre du cercle est le point double de la strophoïde, l'asymptote est parallèle à la médiane du quadrilatère et passe par le symétrique, par rapport à cette médiane, du foyer de la parabole tangente aux quatre droites. Le sommet de la strophoïde est à l'intersection des cercles circonscrits aux triangles obtenus en associant trois par trois les côtés du quadrilatère.

Les sommets opposés du quadrilatère sont conjugués, c'est-à-dire que les tangentes en ces points se coupent sur la strophoïde.

La strophoïde passe par les pieds des hauteurs du triangle des diagonales.

Elle peut être engendrée en menant par le centre du cercle des tangentes aux coniques qui touchent les quatre côtés du quadrilatère. Elle peut aussi être considérée comme le lieu des foyers des mêmes coniques.

Nous avons rencontré précédemment les points que nous avons appelés *conjugués* et nous en avons donné quelques propriétés. Ils jouissent d'un grand nombre d'autres propriétés; nous nous contenterons d'énoncer les plus simples.

Les cercles osculateurs en deux points conjugués (t_1) et $(-t_1)$ rencontrent la strophoïde en deux nouveaux points donnés par les relations

$$t_1^3 \theta_1 = c, \qquad -t_1^3 \theta_2 = c,$$

c'est-à-dire que les points (θ_1) et (θ_2) sont conjugués.

Le cercle tangent en t_1 à la strophoïde et passant par le point conjugué rencontre la strophoïde en un point défini par la relation

$$-t_1^3\theta_2 = c,$$

c'est-à-dire au point où le cercle osculateur à la courbe en $(-t_1)$ la rencontre de nouveau. De même, le cercle tangent en $(-t_1)$ et passant en t_1 coupe la strophoïde au point (θ_1). La droite qui joint deux points conjugués a pour équation

$$t^2(1+t^2)x + c(1+t^2)y - at^2 = 0.$$

Lorsque le paramètre t varie, elle enveloppe la parabole qui a pour équation

$$(x+cy-a)^2 - 4cxy = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$(x-cy)^2 - 2ax - 2acy + a^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une parabole tangente aux axes de coordonnées. Les propriétés des points conjugués peuvent se résumer ainsi :

Théorème. — *Étant donnés deux points conjugués sur la strophoïde, c'est-à-dire deux points dont les paramètres sont égaux et de signes contraires, les tangentes en ces points se rencontrent sur la strophoïde.*

Ils sont équidistants de la parallèle à l'asymptote menée par le point double.

Les droites qui les joignent au point double forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point.

Les cercles osculateurs à la strophoïde en deux points conjugués rencontrent la strophoïde en deux nouveaux points également conjugués.

La droite qui joint deux points conjugués enveloppe une parabole qui touche les tangentes à la strophoïde au point double.

Le cercle osculateur à la strophoïde au point (t_1) rencontre cette courbe au point (t_2) défini par la relation

$$t_1^3 t_2 = c.$$

De même le centre osculateur en (t_2) la rencontre au point (t_3),

$$t_2^3 t_3 = c,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$t_{n-1}^3 t_n = c;$$

de ces relations on déduit facilement

$$t_n (t_1)^{3^{n-1}} = c^{1+3+3^2+\ldots+3^{n-2}}.$$

Que faut-il pour que le polygone se ferme? Évidemment que $t_n = t_1$. Faisons donc $t_n = t_1$ dans la relation précédente, il vient

$$(t_1)^{3^{n-1}+1} = c^k,$$

en posant

$$k = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-2}.$$

Donc, pour obtenir les points qui peuvent donner lieu à un polygone fermé, il faut prendre une racine de l'équation

$$(t_1)^{3^{n-1}+1} = c^k.$$

Mais il est bien évident qu'il faut distinguer deux cas suivant que n est premier ou non. Dans le premier cas, on a un véritable polygone de n sommets; dans le second, on décrit plusieurs fois un polygone d'un moindre nombre de sommets. On peut aussi poser le problème d'une façon un peu différente. Par le point (t_1) menons un cercle qui oscule la strophoïde au point (t_2) donné par la relation

$$t_1 t_2^3 = c;$$

faisons de même pour le point (t_2) et continuons jusqu'au point (t_n). On a les relations

$$t_1 t_2^3 = c, \qquad t_2 t_3^3 = c, \quad \ldots, \quad t_{n-2} t_{n-1}^3 = c, \qquad t_{n-1} t_n^3 = c.$$

On en déduit encore

$$t_1 (t_n)^{3^{n-1}} = c^{1+3+3^2+\ldots+3^{n-2}},$$

et, comme dans le cas précédent, les points qui peuvent servir de départ à un polygone fermé sont fournis par l'équation

$$(t_n)^{3^{n-1}+1} = c^k.$$

Il faut, comme précédemment, distinguer deux cas suivant que n est pair ou impair.

La cissoïde oblique a pour équation

$$(1) \qquad (y - cx)(x^2 + y^2) - ay^2 = 0.$$

Les axes choisis sont la tangente de rebroussement et la perpendiculaire à cette droite menée par le point de rebroussement.

En posant $x = ty$, on exprime les coordonnées d'un point de la courbe au moyen des formules

$$(2) \qquad x = \frac{at}{(1-ct)(1+t^2)}, \qquad y = \frac{a}{(1-ct)(1+t^2)}.$$

La droite qui joint deux points de la courbe a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ at_1 & a & 1 - ct_1 + t_1^2 - ct_1^3 \\ at_2 & a & 1 - ct_2 + t_2^2 - ct_2^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}[c-(t_1+t_2)+c(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)]x \\ \quad +[-1+t_1t_2-ct_1t_2(t_1+t_2)]y+a=0.\end{array}\right.$$

Si l'on fait $t_1=t_2$, on a pour équation de la tangente au point (θ)

$$(4)\quad (c-2\theta+3c\theta^2)x+(-1+\theta^2-2c\theta^3)y+a=0,$$

et l'équation qui donne les valeurs du paramètre θ pour les points de contact des tangentes issues du point (x, y) est

$$(5)\quad 2cy\theta^3-(y+3cx)\theta^2+2x\theta+y-cx-a=0.$$

D'autre part, si l'on cherche les points d'intersection de la droite qui a pour équation

$$(6)\quad ux+vy-1=0,$$

avec la cissoïde, on trouve l'équation

$$(7)\quad ct^3-t^2+(c+au)t+av-1=0,$$

qui donne les valeurs du paramètre t pour les points communs. En écrivant que les équations (5) et (7) sont identiques, on arrive aux relations

$$2y=y+3cx=\frac{2x}{c+au}=\frac{y-cx-a}{av-1}.$$

Par conséquent

$$y-3cx=0$$

représente le lieu des points, tels que les points de contact des tangentes issues de ces points sont en ligne droite. Ces points de contact sont sur la droite

$$\left(\frac{c}{a}-\frac{1}{3ca}\right)X+\left(\frac{4}{3a}-\frac{1}{2y}\right)Y-1=0.$$

qui, lorsque y varie, passe par un point fixe situé sur l'axe des x. On a donc ce théorème :

Théorème. — *Le lieu des points d'où l'on peut mener à une cubique circulaire cuspidale trois tangentes dont les points de contact soient en ligne droite, est une droite issue du point de rebroussement et dont le coefficient angulaire, par rapport à la tangente de rebroussement, est le triple du coefficient angulaire de l'asymptote réelle. La droite qui joint les points de contact passe par un point fixe situé sur la tangente de rebroussement.*

Nous venons de trouver, au moyen de l'équation (7), que les paramètres des points d'intersection d'une cissoïde et d'une droite sont liés par la relation

$$(8)\qquad t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{c}.$$

Si l'on cherche de même les valeurs du paramètre t, pour les points communs à la cissoïde et au cercle

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

on trouve

$$(9)\qquad \begin{cases} c^2\gamma t^4 - 2c\gamma t^3 + (c^2\gamma + \gamma + 2ac\alpha)t^2 \\ \qquad + (2ac\beta - 2c\gamma - 2a\alpha)t + a^2 + \gamma - 2a\beta = 0, \end{cases}$$

d'où la relation

$$(10)\qquad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{2}{c}.$$

Il résulte des relations (8) et (10) que, si nous considérons quatre points de la cissoïde A, B, C, D sur un cercle, les droites AB et CD rencontrent la cissoïde en deux points P et Q dont les paramètres θ_1 et θ_2 sont liés par la relation

$$\theta_1 + \theta_2 = 0.$$

Les droites qui les joignent au point de rebroussement sont également inclinées sur la tangente de rebroussement, et l'on vérifie aisément qu'ils sont situés sur une parallèle à l'asymptote.

Théorème. — *Si, autour de deux points, pris sur la cissoïde et situés sur une parallèle à l'asymptote de cette courbe, on fait pivoter deux droites, les points d'intersection de ces droites et de la cissoïde sont sur un cercle.*

Les formules (8) et (10) nous montrent encore que, par un point de la cissoïde, on ne peut mener qu'une tangente à la courbe, fait bien connu; que par un point (t_1), on ne peut faire passer qu'un cercle osculateur à la cissoïde, cercle dont le paramètre du point d'osculation est donné par la formule

$$3\theta = \frac{2}{c} - t_1.$$

Enfin, comme les quantités t et c ont une signification géométrique simple et bien déterminée, ces mêmes formules permettent de résoudre les problèmes suivants :

Par un point de la cissoïde, mener une tangente à cette courbe.

Trouver le troisième point d'intersection d'une tangente à la cissoïde avec cette courbe, et, plus généralement : *Connaissant deux des points d'intersection d'une droite et de la cissoïde, trouver le troisième.*

Enfin, en utilisant le théorème précédent, *mener en un point le cercle osculateur à la cissoïde.*

Si dans la formule (8) nous faisons $t_1 = t_2 = t_3$, on voit immédiatement que la cissoïde présente un point d'inflexion et un seul donné par la formule

$$t = \frac{1}{3c}.$$

De même, si dans la formule (10) nous faisons

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4,$$

on obtient un point de la cissoïde où il existe un cercle surosculateur à la courbe et le paramètre de ce point a pour valeur

$$t = \frac{1}{2c}.$$

Les formules (8) et (10) permettent d'énoncer pour la cissoïde des théorèmes analogues à ceux que nous avons donnés pour la strophoïde.

Théorème. — *Si l'on coupe une cissoïde par un cercle quelconque, que par deux des points d'intersection on fasse passer un cercle, et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles coupent la cissoïde en quatre nouveaux points situés sur un cercle.*

Théorème.—*Les cercles osculateurs en quatre points concycliques coupent la courbe en quatre nouveaux points également concycliques.*

Théorème. — *Les cercles osculateurs en trois points de la cissoïde en ligne droite la coupent en trois nouveaux points; le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points passe par un point fixe qui est le point où la cissoïde est surosculée par un cercle.*

Ces formules permettent aussi de démontrer aisément qu'il n'existe pas de quadrilatère complet véritable inscrit dans la cissoïde.

En effet, supposons qu'il en existe un dont les sommets A, B, C, α, β, γ correspondent aux valeurs t_1, t_2,

t_3, θ_1, θ_2, θ_3 du paramètre t. Les points B, C, α; C, A, β; A, B, γ; α, β, γ étant en ligne droite, on a les relations

$$t_2 + t_3 + \theta_1 = \frac{1}{c}, \qquad t_3 + t_1 + \theta_2 = \frac{1}{c},$$

$$t_1 + t_2 + \theta_3 = \frac{1}{c}; \qquad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{1}{c},$$

d'où l'on déduit

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{c},$$

c'est-à-dire que les points A, B, C sont aussi en ligne droite, et que, par suite, il n'existe pas de quadrilatère complet véritable inscrit dans la cissoïde.