Nouvelles annales de mathématiques

Maurice d'Ocagne

Sur une classe de transformations dans le triangle et notamment sur certaine transformation quadratique birationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 337-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__337_0>

SUR UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS DANS LE TRIANGLE ET NOTAMMENT SUR CERTAINE TRANSFORMATION QUADRATIQUE BIRATIONNELLE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Dans l'étude des transformations géométriques qui sont liées à la considération d'un triangle, on fait très généralement usage du système des coordonnées trilinéaires ou de celui, équivalent au fond, des coordonnées barycentriques. Ce choix s'explique aisément, en raison du rôle fondamental joué par le triangle dans ces transformations, surtout lorsque le mode de liaison adopté fait intervenir symétriquement les éléments primordiaux, côtés ou angles, du triangle, comme c'est le cas pour les transformations dites *isotomique* et *isogonale*.

Mais l'habitude prise de ce genre de méthode ne doit pas faire perdre de vue les avantages qu'on peut, le cas échéant, retirer de l'emploi d'autres systèmes de coordonnées et notamment de celui des coordonnées générales dont j'ai eu l'occasion de signaler ici même (¹) l'importance à un point de vue, en quelque sorte, philosophique.

Le but de la présente Note est de mettre ce fait en relief par quelques considérations générales appuyées d'un exemple particulier.

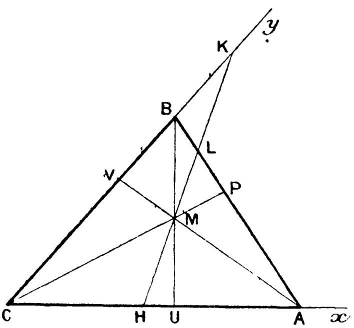
(¹) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. XI, p. 72.

I. — Généralités.

2. Je rappellerai d'abord la définition des coordonnées en question.

Soit M un point quelconque pris dans le plan du triangle fondamental ABC (*fig.* 1). Tirons les droites

Fig. 1.



AM et BM qui coupent respectivement CB et CA en V et en U, et posons, en représentant par λ et μ des constantes quelconques pour toute l'étendue du plan,

$$x = \lambda \frac{\text{UC}}{\text{UA}}, \qquad y = \mu \frac{\text{VC}}{\text{VB}};$$

x et y sont les coordonnées du point M.

Le théorème de Jean de Ceva montre, en outre, que si la droite CM coupe AB en P, on a

$$\frac{\text{PA}}{\text{PB}} = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{y}{x}.$$

Dans ce système de coordonnées, toute équation du premier degré représente une droite et réciproquement.

On démontre bien facilement que si l'équation d'une droite s'écrit

$$ax + by + c = 0,$$

et si cette droite coupe les droites CA, CB et AB respectivement aux points H, K et L, on a

$$\frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{HA}} = -\frac{1}{\lambda}\frac{c}{a}, \qquad \frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{KB}} = -\frac{1}{\mu}\frac{c}{b}, \qquad \frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LC}} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{a}{b}.$$

Il en résulte que si, pour plusieurs droites, l'un des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ ou $\frac{a}{b}$ est constant, ces droites passent toutes par un même point de la droite CA, de la droite CB ou de la droite AB.

Si a, b ou c est nul, la droite correspondante passe par le point A, B ou C.

En posant, comme je l'ai proposé dans la Note citée,

$$u = -\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HC}}, \qquad v = -\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{KC}},$$

et prenant u et v comme coordonnées de la droite HK, on voit que la condition pour que le point (x, y) se trouve sur la droite (u, v) s'écrit

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Le théorème des transversales montre, en outre, que si la droite HK coupe AB en L, on a

$$\frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LB}} = \frac{\lambda u}{\mu v}.$$

Grâce à ces définitions, l'usage que l'on peut faire de ces coordonnées généralisées est identiquement le même que celui que l'on est dans l'habitude de faire des coordonnées cartésiennes et pluckériennes; seule l'interprétation géométrique des résultats diffère.

En particulier, l'équation de la tangente au point (X, Y) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

est

$$(y - Y)f'_Y + (x - X)f'_X = 0.$$

Toute équation du $n^{\text{ième}}$ degré en x et y définit une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, et toute équation du $n^{\text{ième}}$ degré en u et v, une courbe de la $n^{\text{ième}}$ classe.

3. On voit immédiatement à quel genre de transformations s'appliquera spécialement le système de coordonnées en question.

Soient M et M′ deux points pris dans le plan du triangle ABC. Les droites AM et AM′ coupant CB en V et en V′, les droites BM et BM′ coupant CA en U et en U′, supposons que l'on ait

$$\varphi\left(\frac{UC}{UA}, \frac{U'C}{U'A}, \frac{VC}{VB}, \frac{V'C}{V'B}\right) = 0,$$
$$\psi\left(\frac{UC}{UA}, \frac{U'C}{U'A}, \frac{VC}{VB}, \frac{V'C}{V'B}\right) = 0.$$

Nous définissons ainsi une transformation qui fait correspondre le point M′ au point M.

Faisant usage des coordonnées ci-dessus définies, nous voyons que l'étude analytique de la transformation considérée se ramènera au système d'équations

$$(1)\qquad \varphi\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{x'}{\lambda}, \frac{y}{\mu}, \frac{y'}{\mu}\right) = 0, \qquad \psi\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{x'}{\lambda}, \frac{y}{\mu}, \frac{y'}{\mu}\right) = 0,$$

dans lequel nous pourrons encore disposer de λ et de μ en vue de la plus grande simplicité possible.

Voici des exemples :

1° *Transformation isotomique.* — Ici, on a

$$\frac{UC}{UA} = \frac{U'A}{U'C}, \qquad \frac{VC}{VB} = \frac{V'B}{V'C}.$$

Il est, dès lors, tout naturel de prendre $\lambda = \mu = 1$, et les équations de la transformation deviennent

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{1}{y'}.$$

2° *Transformation isogonale.* — Dans cette transformation l'angle CBU est égal à l'angle U'BA et l'angle CAV à l'angle V'AB. Or, on a

$$\frac{\sin \mathrm{CBU}}{\sin \mathrm{UBA}} = \frac{\mathrm{CU.AB}}{\mathrm{UA.CB}}, \qquad \frac{\sin \mathrm{CAV}}{\sin \mathrm{VAB}} = \frac{\mathrm{CV.AB}}{\mathrm{VB.CA}}.$$

La transformation comporte donc les formules

$$\frac{\mathrm{CU.AB}}{\mathrm{UA.CB}} = \frac{\mathrm{U'A.CB}}{\mathrm{CU'.AB}}, \qquad \frac{\mathrm{CV.AB}}{\mathrm{VB.CA}} = \frac{\mathrm{V'B.CA}}{\mathrm{CV'.AB}}.$$

Si, par suite, on prend $\lambda = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}$, $\mu = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}}$, on voit que les équations de la transformation seront encore

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{1}{y'}.$$

Tous les résultats établis analytiquement, au moyen des coordonnées précédentes, pour l'une des deux transformations considérées, seront donc encore vrais pour l'autre. Il suffira simplement, dans leur interprétation géométrique, de tenir compte de la différence de définition des deux systèmes de coordonnées.

Mais les transformations en question sont trop connues pour que je m'y arrête ici.

4. La même méthode s'appliquera encore s'il s'agit d'une transformation tangentielle dans laquelle les droites se correspondent suivant une relation entre les rapports qu'elles déterminent sur les côtés d'un triangle fondamental. Il suffira seulement de faire usage des coordonnées tangentielles u et v au lieu des coordonnées ponctuelles x et y.

II. — Étude d'une transformation quadratique birationnelle particulière.

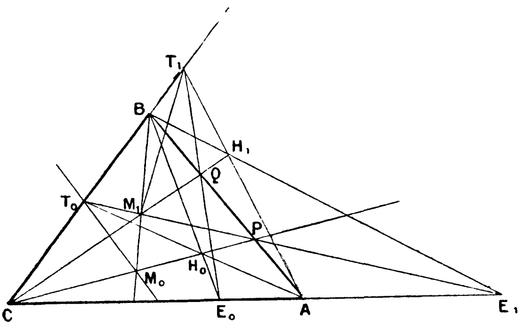
5. Le cas le plus simple est celui des transformations quadratiques birationnelles qui lient deux courbes de telle sorte qu'à un point de l'une d'elles ne correspond qu'un point de l'autre et réciproquement.

Dans ce cas, les équations (1) sont du premier degré, soit qu'on les considère par rapport au système des variables x et y, ou à celui des variables x' et y'.

A titre d'exemple de la méthode dont je viens de parler, je vais aborder l'étude d'une transformation de ce genre.

Cette transformation, qui est réciproque, sera définie de la manière suivante (*fig.* 2) :

Fig. 2.



Soient ABC *le triangle fondamental;* M_0 *et* M_1 *deux points correspondants. Les points* M_0 *et* M_1 *sont en ligne droite avec le point* B; *en outre, les droites* CM_0 *et* CM_1 *rencontrent le côté* AB *en des points isotomiques* (*symétriques par rapport au milieu de* AB).

On voit immédiatement que les formules de la transformation sont, en prenant $\lambda = \mu = 1$,

(2) $$x_0 = x_1, \qquad x_0 x_1 = y_0 y_1.$$

Si donc l'équation d'une courbe c_0 donnée est, en désignant par un indice les coordonnées courantes qui s'y rapportent,

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

l'équation de sa transformée c_1 sera

$$f\left(x_1, \frac{x_1^2}{y_1}\right) = 0.$$

6. Voyons tout de suite comment sont liées géométriquement les tangentes en des points correspondants de ces courbes.

La différentiation des équations (2) donne

$$dx_0 = dx_1 \qquad \text{et} \qquad x_0\, dx_1 + x_1\, dx_0 = y_0\, dy_1 + y_1\, dy_0;$$

d'où

$$x_0 - y_1 \frac{dy_0}{dx_0} = -x_1 + y_0 \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Or les équations (2) donnent

$$\frac{x_0^2}{y_0} = y_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x_1^2}{y_1} = y_0.$$

On peut donc écrire

$$x_0 - \frac{x_0^2}{y_0}\frac{dy_0}{dx_0} = -x_1 + \frac{x_1^2}{y_1}\frac{dy_1}{dx_1}$$

ou

(3) $$\frac{x_0}{y_0}\left(y_0 - x_0 \frac{dy_0}{dx_0}\right) = -\frac{x_1}{y_1}\left(y_1 - x_1 \frac{dy_1}{dx_1}\right).$$

Mais, si les droites CM_0 et CM_1 coupent AB respectivement en P et en Q, on a

$$\frac{x_0}{y_0} = -\frac{PB}{PA}, \qquad \frac{x_1}{y_1} = -\frac{QB}{QA}.$$

D'autre part, l'équation de la tangente en M_0 étant

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{dy_0}{dx_0},$$

si l'on appelle T_0 le point où elle coupe CB, on obtient, en faisant $x=0$ dans l'équation précédente,

$$\frac{T_0C}{T_0B}=y_0-x_0\frac{dy_0}{dx_0}.$$

De même

$$\frac{T_1C}{T_1B}=y_1-x_1\frac{dy_1}{dx_1}.$$

L'équation (3) est donc équivalente à

$$\frac{PB}{PA}\,\frac{T_0C}{T_0B}=-\frac{QB}{QA}\,\frac{T_1C}{T_1B}.$$

Les droites CP et AT_0 se coupant en H_0, tirons la droite BH_0 qui rencontre CA en E_0. Nous avons, par le théorème de Ceva,

$$\frac{PB.T_0C.E_0A}{PA.T_0B.E_0C}=-1.$$

De même, si CQ et AT_1 se coupent en H_1 et si BH_1 rencontre CA en E_1,

$$\frac{QB.T_1C.E_1A}{QA.T_1B.E_1C}=-1.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\frac{E_0A}{E_0C}=-\frac{E_1A}{E_1C}.$$

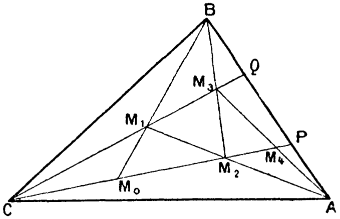
Elle exprime que *les points* E_0 *et* E_1 *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* C *et* A.

On en déduit immédiatement que la droite E_0Q passe par T_1, et la droite E_1P par T_0.

Ainsi se trouve mis en évidence le lien géométrique qui unit les tangentes M_0T_0 et M_1T_1.

7. Si, dans la définition donnée au n° 5, on intervertit le rôle joué par les points A et B, c'est-à-dire si on aligne les points correspondants M_1 et M_2 sur le

Fig. 3.



point A (*fig.* 3), les formules de la transformation sont

$$x_1 = x_2, \qquad x_1 x_2 = y_1 y_2. \tag{4}$$

Nous allons appliquer alternativement les transformations (2) et (4) en partant d'une droite d_0 passant par le point A, c'est-à-dire ayant pour équation

$$y_0 = k.$$

Si nous appliquons la transformation (2), nous obtenons pour la transformée d_1 de d_0 l'équation

$$x_1^2 = k y_1,$$

qui représente une conique tangente à AC et à AB en C et en B.

La transformation (4) appliquée à d_1 donne pour d_2 l'équation

$$y_2^3 = k x_2^2,$$

qui représente une cubique tangente à AB en A où elle présente une inflexion et à CA en C où elle présente un rebroussement. L'existence de ce rebroussement montre que cette cubique est *cuspidale* (¹), d'après la terminologie de Salmon.

On voit bien aisément qu'en continuant à appliquer ainsi alternativement les transformations (2) et (4) on obtient d'une manière générale pour les courbes d_{2n} et d_{2n+1} les équations

$$y_{2n}^{2n+1} = kx_{2n}^{2n}$$

et

$$x_{2n+1}^{2n+2} = ky_{2n+1}^{2n+1}.$$

Ces courbes sont, au degré près, absolument de même nature lorsqu'on permute x et y, c'est-à-dire les rôles joués par les axes CA et CB. Nous pouvons donc nous borner à l'étude de l'une d'elles, d_{2n} par exemple.

8. Cette courbe d_{2n} est, d'après son mode même de génération, *unicursale* ou de *genre zéro*, puisqu'elle correspond point par point d'une manière univoque à une droite.

Elle est de l'*ordre* $2n+1$ puisque son équation ponctuelle est de degré $2n+1$.

Il suffit donc, pour définir complètement son espèce, de chercher sa *classe*, c'est-à-dire de former son équation tangentielle au moyen des coordonnées u et v définies plus haut.

L'équation de la tangente au point (x, y) de la courbe est

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{dy}{dx}.$$

Si donc α et β sont l'X et l'Y des points où cette tan-

(¹) Nous avons déjà examiné ce mode spécial de génération des cubiques cuspidales dans une Note publiée par les *Nouvelles Annales* (3ᵉ série, t. XI, p. 386).

gente rencontre respectivement CA et CB, on a

$$\alpha = x - y\,\frac{dx}{dy},$$

$$\beta = y - x\,\frac{dy}{dx}.$$

Or, l'équation de la courbe étant

$$y^{2n+1} = kx^{2n},$$

on a

$$(2n+1)y^{2n}\,dy = 2nk\,x^{2n-1}\,dx;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2nkx^{2n-1}}{(2n+1)y^{2n}} = \frac{2ny}{(2n+1)x}.$$

Donc

$$\alpha = -\frac{x}{2n},$$

$$\beta = \frac{y}{2n+1}.$$

Mais les coordonnées u et v de la tangente sont données par

$$u = -\frac{1}{\alpha}, \qquad v = -\frac{1}{\beta}.$$

Il vient, par suite,

$$u = \frac{2n}{x}, \qquad v = -\frac{2n+1}{y},$$

et l'équation tangentielle de la courbe obtenue en portant les valeurs de x et y tirées de là dans son équation ponctuelle est

$$(2n+1)^{2n+1}u^{2n} = k(2n)^{2n}(-v)^{2n+1}.$$

Cette équation étant de degré $2n+1$, la courbe est de la *classe* $2n+1$.

Ainsi donc, *la courbe d_{2n} est une courbe unicursale dont l'ordre et la classe sont tous deux égaux à* $2n+1$.

Et, puisqu'on passe des indices pairs aux indices impairs par la simple permutation de x et de y, on peut dire d'une manière générale que *la courbe d_n est une courbe unicursale dont l'ordre et la classe sont tous deux égaux à $n+1$*.

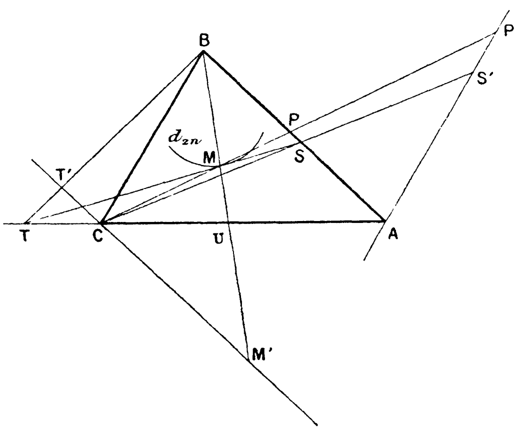
Les formules de Plücker montrent que le nombre des points doubles d'une telle courbe et celui de ses tangentes doubles sont égaux à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, celui des points stationnaires (rebroussements) et celui de ses tangentes stationnaires (inflexions) à $n-1$.

Ces courbes peuvent être considérées comme généralisant les coniques.

Pour $n=3$, on obtient une unicursale d'ordre 3 et de classe 3, c'est-à-dire une cubique cuspidale, ainsi que nous l'avons trouvé précédemment par une autre voie.

9. Les formules ci-dessus établies conduisent à des

Fig. 4.



constructions remarquablement simples pour la tangente en un point choisi sur la courbe d_{2n} (*fig.* 4).

Prenons, par exemple, la formule

$$ux = 2n.$$

Si la droite BM coupe CA en U et si la tangente en M coupe CA en T, cette formule peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{UC}}{\mathrm{UA}}\,\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{TC}} = -\,2n.$$

Par le point C menons à AB la parallèle CM'T' qui coupe BM en M' et BT en T'. Le rapport anharmonique étant projectif, nous avons

$$\frac{\mathrm{M'C}}{\mathrm{T'C}} = -\,2n.$$

En d'autres termes, les points M' et T' sont situés de part et d'autre du point C et la longueur M'C est égale à $2n$ fois la longueur T'C. De là le moyen de construire la tangente MT si l'on se donne le point M et le point M si l'on se donne la tangente.

Pour une courbe d'ordre impair la construction sera la même en intervertissant les rôles des points A et B.

10. Voici encore un autre mode de liaison géométrique du point et de la tangente de la courbe d_{2n}.

On a

$$\frac{ux}{vy} = -\,\frac{2n}{2n+1}.$$

Si la droite CM coupe AB en P et que la tangente MT coupe AB en S, cette égalité peut s'écrire ([1])

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SB}}\left(-\,\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}}\right) = -\,\frac{2n}{2n+1}$$

([1]) J'ai, dans la Note citée, donné cette propriété pour les cubiques cuspidales.

ou

$$\frac{SA.PB}{SB.PA} = \frac{2n}{2n+1}.$$

Par le point A menons à BC la parallèle AP′S′ qui coupe CP en P′ et CS en S′. Nous avons alors

$$\frac{S'A}{P'A} = \frac{2n}{2n+1}.$$

11. Chaque courbe d_n, lorsqu'on se donne le triangle fondamental ABC, est déterminée par une seule condition puisque son équation contient le paramètre unique k.

Il suffit donc de s'en donner un point ou une tangente. Dans ce second cas, on obtient d'ailleurs le point de contact, par application soit du théorème du n° 9, soit de celui du n° 10, et l'on est ramené au premier.

Soit donc M_n le point donné; on construit son correspondant M_0 par l'application alternée des transformations (2) et (4); on n'a plus ensuite qu'à faire parcourir au point m_0 la droite AM_0 pour que son correspondant m_n engendre la courbe d_n demandée.

On peut notamment ainsi construire une conique tangente aux droites AB et AC en B et en C et passant par un point donné.

12. A titre d'exemple d'application, j'indiquerai une construction très simple et très commode en pratique (car tout le tracé tient à l'intérieur du parallélogramme des données) de l'ellipse dont on donne deux diamètres conjugués, problème qui se rencontre souvent, notamment en perspective et dans l'épure des ponts à intrados elliptique.

Soient OB et OC deux demi-diamètres conjugués donnés. Complétons le parallélogramme BOCA.

L'ellipse cherchée doit être tangente à AB et à AC en B et en C et passer par le symétrique M_1 de C par rapport à O.

Le correspondant M_0 de M_1, en vertu de la transformation (2), coïncide ici avec M_1 puisque CM_1 est parallèle à AB. Nous prendrons donc pour droite AM_0 la droite AM_1, c'est-à-dire la droite joignant le point A au milieu β de OB.

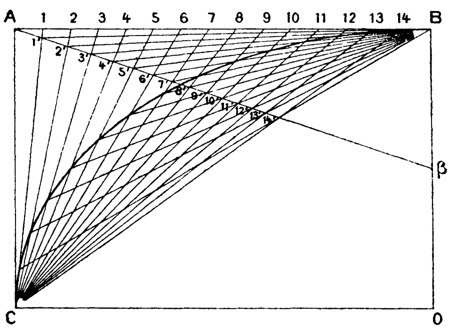
Pour avoir un point quelconque m_1 de l'ellipse cherchée, nous prendrons sur $A\beta$ un point quelconque m_0 ; nous tirerons Cm_0 qui coupe AB en p_0 ; et nous porterons de B vers A le segment Bp_1 égal à Ap_0. La rencontre des droites Cp_1 et Bm_0 donnera m_1.

Si l'on veut obtenir la tangente en m_1, le théorème du n° 10 donne la construction suivante (en remarquant que puisqu'il s'agit de d_1, c'est-à-dire d'une courbe à indice impair, on doit intervertir A et B) :

La droite Cp_1 coupant OB en p'_1, prendre le milieu s'_1 de Bp'_1. Si la droite Cs'_1 coupe AB en s_1, $m_1 s_1$ est la tangente cherchée.

Une manière très commode d'appliquer la construc-

Fig. 5.



tion par points de l'ellipse, donnée ci-dessus, est la suivante (*fig.* 5).

Diviser AB *en* $n+1$ *parties égales par des points numérotés* 1, 2, ..., n. *Tirer les droites* C1, C2, ..., Cn *qui donnent sur* Aβ, β *étant le milieu de* OB, *les points* $1'$, $2'$, ..., n'. *Enfin, tirer les droites* B$1'$ B$2'$, ..., Bn'. *On obtient des points de l'ellipse cherchée par la rencontre des couples de droites qui suivent*

$$\begin{array}{rcl} C1 & \text{et} & Bn', \\ C2 & \text{et} & B(n-1)', \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ C(n-1) & \text{et} & B2', \\ Cn & \text{et} & B1'. \end{array}$$

Cette construction est d'autant plus à recommander dans la pratique que les points de l'ellipse ainsi obtenus sont assez régulièrement espacés sur la courbe, comme on peut en juger sur la *fig.* 5, où l'on a fait $n = 14$.