

E. JABLONSKI

**Démonstration du théorème de d'Alembert**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 12  
(1893), p. 301-304

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1893\\_3\\_12\\_\\_301\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__301_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT;**

PAR M. E. JABLONSKI,

Professeur au lycée Charlemagne.

J'ai donné dernièrement dans le *Bulletin scientifique* de M. Lebon une démonstration de ce théorème que je croyais nouvelle; M. Brisse m'a fait observer qu'elle avait été donnée jadis par Sturm et arrangée par Liouville. En voici une autre que je crois préférable, et qui ne laisserait rien à désirer si l'on pouvait établir d'une manière plus élémentaire le lemme sur lequel je m'appuie.

LEMME. — *On peut toujours trouver dans le plan au moins une valeur finie de  $z$  telle que le module d'un polynôme  $f(z)$  prenne une valeur moindre qu'un nombre donné  $\varepsilon$ , si petit qu'il soit.*

En effet, si pour toute valeur de  $z$  le module de  $f(z)$  était supérieur à  $\varepsilon$ , celui de  $\frac{1}{f(z)}$  serait inférieur à  $\frac{1}{\varepsilon}$ , nombre fixe donné; donc cette dernière fonction qui est holomorphe dans toute l'étendue du plan serait une constante, en vertu du théorème de Liouville. Il en serait donc de même de  $f(z)$ , c'est-à-dire que tous les coefficients seraient nuls, sauf le terme indépendant de  $z$ , ce qu'on ne suppose pas.

THÉORÈME. — *Si une équation algébrique de degré  $m - 1$  admet  $m - 1$  racines, toute équation algébrique de degré  $m$  admet  $m$  racines.*

Soit

$$f(z) = \Lambda_0 z^m + \Lambda_1 z^{m-1} + \dots + \Lambda_m = 0$$

une équation algébrique de degré  $m$ . L'équation dérivée  $f'(z) = 0$  est de degré  $m - 1$  et admet, par hypothèse,  $m - 1$  racines  $a, b, c, \dots, l$ . Si l'un des nombres  $f(a), f(b), f(c), \dots, f(l)$  est nul, le théorème est démontré. Sinon soit  $\text{mod} f(a) = \Lambda \neq 0$ ; on peut décrire de  $a$  comme centre un cercle de rayon  $\varrho$  assez petit, mais fixe, tel que dans tout l'intérieur de ce cercle on ait

$$\text{mod} f(z) > \frac{\Lambda}{2}.$$

Donc, si l'on suppose, ce qui est permis, que  $\Lambda$  est le plus petit des modules des nombres  $f(a), f(b), \dots, f(l)$ , cette condition sera satisfaite dans tout l'intérieur de tous les cercles de rayon  $\varrho$ , de centres  $a, b, c, \dots, l$  et, par conséquent, si pour un point  $z$  on a

$$\text{mod} f(z) < \frac{\Lambda}{2},$$

le point  $z$  sera extérieur à tous ces cercles.

Or on a

$$f'(z) \equiv m \Lambda_0 (z - a)(z - b) \dots (z - l);$$

donc, pour tout point extérieur aux cercles  $\varrho$ ,

$$\text{mod} f'(z) > m \Lambda_0 \varrho^{m-1} \quad \text{ou} \quad P.$$

On peut ensuite décrire, de l'origine comme centre, une circonférence de rayon  $\varrho'$  assez grand, mais fixe, tel que pour tout point extérieur à cette circonférence on ait

$$\text{mod} f(z) > M,$$

$M$  étant un nombre donné.

Donc tout point  $z$  tel que  $f'(z) < M$  est à l'intérieur de ce cercle  $\rho'$  et les modules de

$$\frac{1}{2} f''(z), \quad \frac{1}{3!} f'''(z), \quad \frac{1}{4!} f^{(4)}(z), \quad \dots, \quad \frac{1}{m!} f^{(m)}(z)$$

sont tous moindres qu'un nombre assignable  $M'$  fixe.

Cela posé, je puis choisir  $z_0$  tel que le module de  $f(z_0)$  ou  $R_0$  soit moindre que le plus petit des nombres

$$\frac{A}{2}, \quad M, \quad P, \quad \frac{P^2}{(m-1)M'} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2};$$

il sera intérieur au cercle  $\rho'$  et extérieur aux cercles  $\rho$ ; en particulier  $R_0 \alpha < 1$ .

Je fais  $z = z_0 + h$ , d'où

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h f'(z_0) + \frac{h^2}{2!} f''(z_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(z_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(z_0),$$

puis  $h = -\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ , j'ai

$$f(z_0 + h) = h^2 \left[ \frac{1}{2} f''(z_0) + \frac{h}{3!} f'''(z_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(z_0) \right];$$

donc

$$\text{mod } f(z_0 + h)$$

ou

$$R_1 < h^2 (m-1) M' < R_0^2 \frac{(m-1)M'}{P^2} = R_0^2 \alpha < R_0,$$

donc le point  $z_1 = z_0 + h$  jouit des mêmes propriétés que  $z_0$ .

Je fais ensuite  $z = z_1 + k$  puis  $k = -\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}$  et j'ai, en posant  $R_2 = \text{mod } f(z_1 + k)$ ,

$$R_2 < k^2 (m-1) M' < R_1^2 \alpha < R_0^4 \alpha^3 < R_0 (R_0 \alpha)^2 < R_0.$$

donc le point  $z_2 = z_1 + k$  jouit des mêmes propriétés que  $z_1$  et  $z_0$  et ainsi de suite. Je forme ainsi une suite de nombres ou points

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots,$$

bien déterminés, tous intérieurs au cercle  $\rho'$  et extérieurs aux cercles  $\rho$ .

Si pour  $n$  fini, on a

$$f(z_n) = 0,$$

le théorème est démontré.

Si non la suite se prolonge indéfiniment et l'on a

$$\begin{aligned} \text{mod } f(z_0) &= R_0, \\ \text{mod } f(z_1) &= R_1 < R_0(R_0 z), \\ \text{mod } f(z_2) &= R_2 < R_0(R_0 z)^2, \\ \text{mod } f(z_3) &= R_3 < R_0(R_0 z)^3, \\ &\dots\dots\dots, \\ \text{mod } f(z_n) &= R_n < R_0(R_0 z)^n. \end{aligned}$$

Donc  $R_n$  tend vers zéro lorsque  $n$  croit indéfiniment.

Or

$$z_n = z_0 - \frac{R_0}{f'(z_0)} - \frac{R_1}{f'(z_1)} - \frac{R_2}{f'(z_2)} - \dots - \frac{R_{n-1}}{f'(z_{n-1})},$$

qui forme une série lorsque l'on imagine que  $n$  croit indéfiniment.

On a, quel que soit  $p$ ,

$$\text{mod} \left| \frac{R_p}{f'(z_p)} \right| < \frac{R_0}{P} (R_0 z)^p;$$

donc la série est absolument convergente et  $z_n$  tend vers une limite finie et bien déterminée  $\lambda$ , mais  $f(z_n)$  tend vers  $f(\lambda)$  : donc  $f(\lambda) = 0$ .

L'équation admet donc la racine  $\lambda$  et, par suite, admet  $m$  racines.

