BALITRAND

Sur un système de coordonnées tangentielles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 256-286
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__256_1>

SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES TANGENTIELLES;

Par M. BALITRAND.
Lieutenant du Génie.

Il arrive souvent que l'équation tangentielle d'une courbe est simple et facile à obtenir, tandis que l'équation ponctuelle de la même courbe est difficile à trouver et, en outre, compliquée. Il est commode alors d'avoir des formules qui permettent d'étudier directement sur l'équation tangentielle les propriétés de la courbe; ce sont ces formules que nous voulons obtenir pour en faire ensuite quelques applications.

Une droite étant définie par l'équation

$$ux + vy - 1 = 0,$$

les coordonnées tangentielles ordinaires de cette droite sont les quantités u et v; c'est-à-dire les inverses des segments qu'elle détermine à partir de l'origine sur les axes de coordonnées. Mais à cette équation, nous substituerons le plus souvent l'équation

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - 1 = 0,$$

et aux coordonnées u et v, les coordonnées p et φ, que nous appellerons *coordonnées tangentielles polaires*, ou, par abréviation et quand il ne saurait y avoir d'erreur, *coordonnées polaires*.

D'ailleurs, on passe des premières aux secondes par les formules

$$(1)\qquad u = \frac{\cos\varphi}{p}, \qquad v = \frac{\sin\varphi}{p},$$

et, inversement, l'on passe des coordonnées polaires aux coordonnées ordinaires au moyen des formules

$$(1')\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{v}{u}, \qquad p^2 = \frac{1}{u^2+v^2}.$$

Il est impossible de ne pas remarquer l'analogie de ces formules avec celles qui permettent de passer des coordonnées rectangulaires (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ), et réciproquement,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x}, \qquad r^2 = x^2+y^2.$$

On peut considérer les coordonnées tangentielles polaires à un autre point de vue. Ce ne sont, en effet, autre chose que les coordonnées polaires ordinaires de la podaire de la courbe enveloppée par la droite

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

A toute équation

$$f(p, \varphi) = 0$$

correspondent donc deux courbes, suivant que l'on considère p et φ comme des coordonnées polaires ordinaires ou comme des coordonnées tangentielles polaires.

FORMULES FONDAMENTALES.

Notations. — Soient

u et v les conditions tangentielles ordinaires d'une droite Δ qui enveloppe une courbe C;

p et φ les coordonnées tangentielles polaires de Δ, ou les coordonnées polaires de la podaire de la courbe C;

x et y les coordonnées du point M où Δ touche son enveloppe:

r et θ les coordonnées polaires du point M:

ds l'élément de la courbe enveloppe;

ε l'angle de deux positions infiniment voisines de Δ, c'est-à-dire l'angle de contingence de la courbe C au point M;

ρ le rayon de courbure de la courbe C au point M.

Les coordonnées du point où la droite Δ touche son enveloppe sont données par les deux équations

$$(2)\qquad \begin{cases} ux + vy - 1 = 0, \\ x\,du + y\,dv = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad x = \frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \qquad y = \frac{-du}{u\,dv - v\,du};$$

de ces équations l'on déduit

$$dx = \frac{v(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2}, \qquad dy = \frac{-u(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2},$$

et, par suite,

$$(4)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{(dv\,d^2u - du\,d^2v)\sqrt{u^2 + v^2}}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

L'angle ε se calcule aisément, et l'on trouve

$$(5)\qquad \varepsilon = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2}.$$

Les deux dernières formules donnent alors

$$(6)\qquad \rho = \frac{ds}{\varepsilon} = \frac{(dv\,d^2u - du\,d^2v)(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{(u\,dv - v\,du)^3}.$$

Coordonnées polaires. — Il est aisé de passer des formules que nous venons d'établir aux mêmes formules en coordonnées polaires. En effet, des relations

$$u = \frac{\cos\varphi}{p}, \qquad v = \frac{\sin\varphi}{p},$$

on déduit, en supposant que φ est la variable indépendante

$$u' = -\frac{p\sin\varphi + p'\cos\varphi}{p^2},$$

$$v' = -\frac{p\cos\varphi - p'\sin\varphi}{p^2},$$

$$u'' = -\frac{(p^2 + pp'' - 2p'^2)\cos\varphi - 2pp'\sin\varphi}{p^3},$$

$$v'' = -\frac{(p^2 + pp'' - 2p'^2)\sin\varphi + 2pp'\cos\varphi}{p^3}.$$

On a alors

$$u\frac{dv}{d\varphi} - v\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{p^2},$$

$$\frac{dv}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{du}{d\varphi}\frac{d^2v}{d\varphi^2} = -\frac{p + p''}{p^3},$$

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{p},$$

et, par suite, on arrive aux formules très simples

(7) $$\rho = -(p + p''),$$

(8) $$ds = \rho\varepsilon = -(p + p'')\,d\varphi.$$

Enfin les expressions (3) donnent

(9) $$\begin{cases} x = p\cos\varphi - p'\sin\varphi, \\ p = y\sin\varphi + p'\cos\varphi, \end{cases}$$

puis

(10) $$\begin{cases} x' = -(p + p'')\sin\varphi, \\ y' = (p + p'')\cos\varphi, \\ x'' = -(p' + p''')\sin\varphi - (p + p'')\cos\varphi, \\ y' = (p' + p''')\cos\varphi - (p + p'')\sin\varphi. \end{cases}$$

Les formules classiques pour calculer le rayon de courbure ρ et les coordonnées α et β du centre de courbure

$$\rho = \frac{(x'^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''},$$

$$x - \alpha = \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}, \qquad y - \beta = \frac{-x'(x'^2 - y'^2)}{x'y'' - y'x''}$$

donnent alors

$$(7) \qquad \rho = -(p - p''),$$

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= -p' \sin\varphi - p'' \cos\varphi, \\ \beta &= p' \cos\varphi - p'' \sin\varphi. \end{aligned} \right.$$

Ces dernières formules peuvent s'obtenir directement d'une façon très simple. En effet, l'équation générale des cercles en coordonnées tangentielles ordinaires est

$$\rho^2 = \frac{(u\alpha + v\beta - 1)^2}{u^2 + v^2};$$

en coordonnées tangentielles polaires, elle prend la forme très simple

$$\rho = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi - p,$$

qui, différentiée deux fois, donne

$$-\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi - p' = 0,$$
$$-\alpha \cos\varphi - \beta \sin\varphi - p'' = 0,$$

d'où l'on déduit les relations (7) et (11).

Remarque I. — Dans ce qui précède, nous avons supposé que φ était la variable indépendante, mais rien n'empêche de prendre p comme variable; les formules s'établissent tout aussi simplement. Les coordonnées du point de contact de la droite Δ et de son enveloppe sont déterminées par les deux équations

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{1}{\varphi'} = 0,$$

qui donnent

$$x = p\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varphi'},$$

$$y = p\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\varphi'}.$$

Pour obtenir la valeur du rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure de la courbe au point de contact, nous partirons de l'équation générale des cercles

$$p = \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi - \rho,$$

qui, différentiée deux fois, donne

$$\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi + \frac{1}{\varphi'} = 0,$$

$$\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi - \frac{\varphi''}{\varphi'^3} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\varphi'}\left(\cos\varphi\,\frac{\varphi''}{\varphi'^2} - \sin\varphi\right),\\ \beta &= \frac{1}{\varphi'}\left(\sin\varphi\,\frac{\varphi''}{\varphi'^2} + \cos\varphi\right),\\ \rho &= -p + \frac{\varphi''}{\varphi'^3}.\end{aligned}\right.$$

Remarque II. — Les formules (10) peuvent s'écrire

$$x' = \rho\sin\varphi, \qquad y' = -\rho\cos\varphi$$

et fournissent une interprétation géométrique évidente des quantités x' et y'.

Remarque III. — La quantité p' peut aussi s'interpréter géométriquement. Ce n'est autre chose que la distance PM, du pied P de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur Δ, au point M où la droite Δ touche son enveloppe.

Cette remarque permet d'obtenir l'équation qui donne les longueurs des tangentes menées d'un point (x, y) à une courbe. En effet, soit

$$p = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

l'équation du point, et

$$f(p, \varphi) = 0$$

l'équation de la courbe. On en déduit

$$f'_p p' + f'_\varphi = 0,$$

et, en éliminant p et φ entre ces trois équations, on obtient une équation en p' qui est l'équation cherchée.

APPLICATIONS.

Application aux courbes algébriques. — L'équation générale des courbes algébriques de classe m s'écrit, en coordonnées tangentielles ordinaires,

$$(13) \qquad a_0 + \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) + \ldots + \varphi_m(u, v) = 0,$$

$\varphi_p(u, v)$ désignant un polynôme homogène et de degré p en u et v.

En coordonnées tangentielles polaires, cette équation s'écrit

$$a_0 + \varphi_1\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) + \varphi_2\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) + \ldots + \varphi_m\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) = 0$$

ou développée

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} & a_0 p^m + p^{m-1}(a_1 \cos\varphi - b_1 \sin\varphi) \\ & \quad + p^{m-2}(a_2 \cos^2\varphi + b_2 \cos\varphi \sin\varphi + c_2 \sin^2\varphi) + \ldots \\ & \quad + a_m \cos^m\varphi + b_m \cos^{m-1}\varphi \sin\varphi + \ldots \\ & \qquad\qquad + k_m \cos\varphi \sin^{m-1}\varphi + l_m \sin^m\varphi = 0. \end{aligned} \right.$$

Si, dans l'équation (14), nous assignons à φ une valeur déterminée, cette équation a pour racines les distances de l'origine aux tangentes parallèles à la direction $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Cette équation donne

$$\Sigma p = -\frac{a_1}{a_0}\cos\varphi - \frac{b_1}{a_0}\sin\varphi.$$

On en déduit

$$\Sigma p' = \frac{a_1}{a_0}\sin\varphi - \frac{b_1}{a_0}\cos\varphi,$$

$$\Sigma p'' = \frac{a_1}{a_0}\cos\varphi + \frac{b_1}{a_0}\sin\varphi$$

et, par suite,

$$\Sigma p + \Sigma p' = \Sigma(p + p') = 0,$$

d'où ce théorème, dû, croyons-nous, à Duhamel :

Théorème. — *Si l'on mène à une courbe algébrique de classe m les tangentes parallèles à une direction Δ, la somme des rayons de courbure aux points de contact est nulle.*

Des formules (9) on déduit ensuite

$$\begin{aligned} \Sigma x &= \Sigma p \cos\varphi - \Sigma p' \sin\varphi \\ &= -\frac{a_1}{a_0}\cos^2\varphi - \frac{b_1}{a_0}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{a_1}{a_0}\sin^2\varphi + \frac{b_1}{a_0}\cos\varphi\sin\varphi, \end{aligned}$$

$$\Sigma x = -\frac{a_1}{a_0},$$

de même

$$\Sigma y = -\frac{b_1}{a_0}.$$

Théorème (Chasles). — *Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une direction Δ reste fixe quand Δ varie.*

Les formules (11) donnent de même

$$\Sigma\alpha = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\Sigma\beta = -\frac{b_1}{a_0},$$

et, si l'on appelle α_n et β_n les coordonnées du centre de courbure d'ordre n, on a également

$$\Sigma\alpha_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\Sigma\beta_n = -\frac{b_1}{a_0}.$$

Théorème. — *Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une direction coïncide avec le centre des moyennes distances des centres de courbure aux points de contact, et plus généralement avec le centre des moyennes distances des centres de courbure d'ordre n correspondant aux points de contact.*

Le point $\left(\Sigma x = -\frac{a_1}{a_0},\ \Sigma y = -\frac{b_1}{a_0}\right)$, ou point de Chasles, disparaît si a_0 devient nul, c'est-à-dire si la courbe est tangente à la droite de l'infini. Son équation

$$a_0 p + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi = 0$$

ne dépend que du terme constant et des termes du premier degré de l'équation

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_m(u,v) + \varphi_{m-1}(u,v) + \ldots \\ &\quad + \varphi_1(u,v) + a_0 = f_m(u,v) = 0. \end{aligned} \right.$$

Il reste donc le même pour une foule de courbes liées à la courbe (13), et en particulier pour toutes les courbes homofocales à la courbe (13). En effet, l'équation générale de ces courbes est

$$f_m(u, v)+(u^2+v^2)\,F_{m-2}(u, v)=0,$$

F_{m-2} désignant un polynôme homogène et de degré $m-2$ qui, décomposé en groupes homogènes, s'écrit

$$F_{m-2}(u, v)=\psi_{m-2}(u, v)+\psi_{m-3}(u, v)+\ldots+\psi_1(u, v)+\psi_0.$$

En coordonnées tangentielles polaires, l'avant-dernière équation s'écrit

$$f_m\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right)+\frac{1}{p^2}\,F_{m-2}\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right)=0,$$

ou développée

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0p^m+p^{m-1}\varphi_1(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ \quad +p^{m-2}[\varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi)+\psi_0]+\ldots \\ \quad +p[\varphi_{m-1}(\cos\varphi, \sin\varphi)+\psi_{m-3}(\cos\varphi, \sin\varphi)] \\ \qquad +\varphi_m(\cos\varphi, \sin\varphi)+\psi_{m-2}(\cos\varphi, \sin\varphi)=0. \end{array}\right.$$

Cette équation nous montre que le point de Chasles est le même pour la courbe (15) que pour la courbe (13), quels que soient les polynômes ψ.

Théorème. — *Le point de Chasles d'une courbe* C *de classe m reste le même pour toutes les courbes homofocales à la courbe* C.

On peut encore démontrer directement et de la façon la plus simple le théorème suivant :

Le point de Chasles coïncide avec le centre des moyennes distances des m foyers réels de la courbe (13).

En effet, si $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ sont les coordonnées de m foyers réels, l'équation (13) peut se mettre sous la forme

$$(ux_1+vy_1-1)(ux_2+vy_2-1)\ldots(ux_m+vy_m-1)\\ -(u^2+v^2)F_{m-2}(u,v)=0,$$

puisque c'est l'équation générale des courbes de classe m, qui ont pour foyers réels les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m) et sous cette forme la proposition est évidente.

L'équation (15) peut conduire à d'autres conséquences intéressantes.

En effet, si dans l'équation (14) nous faisons $p=0$, nous obtenons l'équation

$$(14')\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_m(\cos\varphi, \sin\varphi)\\ &\quad = a_m\cos^m\varphi + b_m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi + \ldots\\ &\qquad\qquad k_m\cos\varphi\sin^{m-1}\varphi + l_m\sin^m\varphi = 0,\end{aligned}\right.$$

qui nous donne les valeurs de φ pour les tangentes à la courbe C issues de l'origine.

Faisons de même $p=0$ dans l'équation (15), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\varphi_m(\cos\varphi, \sin\varphi) + \psi_{m-2}(\cos\varphi, \sin\varphi)\\ &\quad = a_m\cos^m\varphi + b_m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi + \ldots\\ &\qquad + k_m\cos\varphi\sin^{m-1}\varphi + l_m\sin^m\varphi\\ &\qquad + a'_{m-2}\cos^{m-2}\varphi + b'_{m-2}\cos^{m-3}\varphi\sin\varphi + \ldots\\ &\qquad\qquad + k_{m-2}\cos\varphi\sin^{m-3}\varphi + l'_{m-2}\sin^{m-2}\varphi = 0.\end{aligned}$$

Pour rendre cette dernière équation homogène en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, il nous suffit de multiplier par

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

et nous obtenons alors

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_m + a'_{m-2})\cos^m\varphi + (b_m + b'_{m-2})\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi\\ &\quad + (c_m + c'_{m-2} + a'_{m-2})\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \ldots\\ &\quad + (f_m + f'_{m-2} + l'_{m-2})\cos^2\varphi\sin^{m-2}\varphi\\ &\quad + (k_m + k'_{m-2})\cos\varphi\sin^{m-1}\varphi + (l_m + l'_{m-2})\sin^m\varphi = 0.\end{aligned}\right.$$

Appelons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ les racines de cette équation; ce sont les angles que font avec Ox les tangentes à la courbe (15) issues de l'origine.

On a, d'après une formule bien connue,

$$\begin{aligned}&\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m)\\&=\frac{\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1-\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2\operatorname{tang}\varphi_3+\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2\ldots\operatorname{tang}\varphi_5-\ldots}{1-\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2+\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2\operatorname{tang}\varphi_3\operatorname{tang}\varphi_4-\ldots}.\end{aligned}$$

Or l'équation (16) donne

$$\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1=\frac{k_m+k'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

$$\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2=\frac{f_m-f'_{m-2}+l'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

$$\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2\operatorname{tang}\varphi_3=\frac{i_m+i'_{m-2}+k'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

$$\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2\operatorname{tang}\varphi_3\operatorname{tang}\varphi_4=\frac{h_m+h'_{m-2}+j'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

$$\Sigma\operatorname{tang}\varphi_1\operatorname{tang}\varphi_2\operatorname{tang}\varphi_3\operatorname{tang}\varphi_4\operatorname{tang}\varphi_5=\frac{g_m+g'_{m-2}+i'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

....

Par suite

$$\begin{aligned}&\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m)\\&=\frac{k_m+k'_{m-2}-(i_m+i'_{m-2}+k'_{m-2})+(g_m+g'_{m-2}+i'_{m-2})-\ldots}{l_m+l'_{m-2}-(j_m+j'_{m-2}+l'_{m-2})+(h_m+h'_{m-2}+j'_{m-2})-\ldots},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m)=\frac{k_m-i_m+g_m-\ldots}{l_m-j_m+h_m-\ldots},$$

C'est le même résultat que si l'on avait calculé $\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m)$ au moyen de l'équation (14').

D'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Si, par un point O, l'on mène les tangentes à une courbe C de classe m, la somme des angles que font ces tangentes avec un axe fixe reste constante pour toutes les courbes homofocales à la courbe C. En particulier, cette somme est égale à celle* *que fait avec le même axe les droites qui joignent le point* O *aux* m *foyers réels de la courbe* C.

Ce théorème n'est qu'une généralisation d'une propriété bien connue des sections coniques : *Les couples de tangentes menées d'un point fixe à un système de coniques homofocales admettent les mêmes bissectrices.*

Propriété qui n'est elle-même qu'une extension du théorème suivant :

Les tangentes menées à une conique à centre par un point fixe sont également inclinées sur les droites qui joignent ce point aux foyers.

Nous venons de voir que les angles que font avec l'axe des x les tangentes à la courbe issues de l'origine sont données par l'équation

$$(17) \qquad \varphi_m(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0.$$

Les longueurs de ces tangentes s'obtiennent par la formule

$$p' = -\frac{\varphi'_m}{\varphi_{m-1}},$$

où il faut remplacer φ par les m racines de l'équation (17). Cette relation a été obtenue en différentiant l'équation (14) et en y faisant ensuite $p = 0$.

La valeur du rayon de courbure au point de contact de l'une des tangentes issues de l'origine est égale, en vertu de la formule (7), à $-p''$, puisque $p = 0$. L'équation qui donne les valeurs du rayon de courbure pour les points de contact des m tangentes issus de l'origine est alors

$$p'' = -\frac{2\varphi'^2_m \varphi_{m-2}}{\varphi^3_{m-1}} + \frac{2\varphi'_m \varphi'_{m-1}}{\varphi^2_{m-1}} - \frac{\varphi''_m}{\varphi_{m-1}},$$

où l'on doit remplacer φ successivement par les m racines de l'équation (17).

Enfin, l'on peut observer que, pour avoir les tangentes communes à la courbe (14) et à un cercle qu'on peut supposer avoir son centre à l'origine, il suffit de donner à p, dans l'équation (14), une valeur déterminée.

Les remarques précédentes peuvent servir à établir certaines propriétés des courbes algébriques, mais nous ne nous y arrêterons pas.

Revenons à la formule

$$\Sigma p = p_1 + p_2 + \ldots + p_m = -\frac{a_1}{a_0}\cos\varphi - \frac{b_1}{a_0}\sin\varphi.$$

Nous savons que $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont les distances de l'origine aux tangentes à la courbe (14) parallèles à la direction $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

Posons

$$(18)\qquad mp = p_1 + p_2 + \ldots + p_m = -\frac{a_1}{a_0}\cos\varphi - \frac{b_1}{a_0}\sin\varphi;$$

p et φ sont alors les coordonnées polaires du centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes à la courbe (14), parallèles à la direction $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

En passant aux coordonnées rectangulaires, l'équation précédente devient

$$ma_0(x^2 + y^2) + a_1 x + b_1 y = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle. Le point diamétralement opposé à l'origine est précisément le point de Chasles. Comme l'équation du cercle ne dépend que du terme constant et des termes du premier degré de l'équation (13), elle reste la même pour toutes les courbes homofocales à la courbe (13). On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on considère une courbe algébrique* C, *et si d'un point* O *l'on abaisse les perpendiculaires* $OA_1, OA_2, \ldots, OA_m$ *sur les tangentes à la courbe parallèles à une direction* Δ, *le lieu du centre des moyennes distances des points* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *quand* Δ *varie, est une circonférence qui reste la même pour toutes les courbes homofocales à la courbe* C.

Ce théorème n'est que l'extension aux courbes algébriques d'une propriété du cercle que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Considérons un cercle C *et un point* O; *menons au cercle deux tangentes parallèles, et abaissons du point* O *les perpendiculaires* OA_1, OA_2 *sur ces tangentes. Le milieu du segment* A_1A_2 *décrit une circonférence qui reste la même pour tous les cercles concentriques au cercle* C.

De la relation (18) on déduit

$$(\Sigma p_1)^2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \cos^2\varphi - \frac{2a_1b_1}{a_0^2}\cos\varphi\sin\varphi + \left(\frac{b_1}{a_0}\right)^2\sin^2\varphi,$$

et, par suite, l'équation (14) donnant

$$\Sigma p_1p_2 = \frac{a_2}{a_0}\cos^2\varphi + \frac{b_2}{a_2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{c_2}{a_0}\sin^2\varphi,$$

on a

$$\begin{aligned}\Sigma p_1^2 &= (\Sigma p_1)^2 - 2\Sigma p_1p_2\\ &= \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}\cos^2\varphi + 2\,\frac{a_1b_1 - a_0b_2}{a_0^2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{b_1^2 - 2a_0c_2}{a_1^2}\sin^2\varphi\\ &= A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi.\end{aligned}$$

En posant

$$mp^2 = \Sigma p_1^2 = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi.$$

le point qui a pour coordonnées polaires p et φ décrit une courbe qui en coordonnées rectangulaires a pour équation

$$m(x^2+y^2)^2 - Ax^2 - 2Bxy - Cy^2 = 0.$$

Cette courbe n'est autre chose que la podaire de l'origine par rapport à la conique qui a pour équation en coordonnées tangentielles,

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 - m = 0,$$

comme il est facile de le vérifier. Donc :

Théorème. — *Si d'un point* O *l'on abaisse les perpendiculaires* OA_1, OA_2, ..., OA_m *sur les tangentes à une courbe* C *parallèles à une direction* Δ *et que l'on prenne le point* A *déterminé par la relation*

$$m\,OA^2 - OA_1^2 + OA_2^2 + \ldots + OA_m^2,$$

le lieu de ce point quand Δ *varie est une courbe qui coïncide avec la podaire du point* O *par rapport à une conique ayant pour centre le point* O; *autrement dit, si par le point* A *on élève une perpendiculaire à la droite* OA, *l'enveloppe de cette droite est une conique ayant pour centre l'origine.*

L'équation (14) nous fournit encore la relation

$$\sum \frac{1}{p_1} = \frac{-\varphi_{m-1}}{\varphi_m},$$

et, en posant

$$\frac{m}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} = -\frac{\varphi_{m-1}}{\varphi_m},$$

le point (p, φ) décrit une courbe qui, en coordonnées polaires, a pour équation

$$\frac{m}{p} = -\frac{a_{m-1}\cos^{m-1}\varphi + b_{m-1}\cos^{m-2}\varphi\sin\varphi + \ldots + k_{m-1}\sin^{m-1}\varphi}{a_m\cos^m\varphi + b_m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi + \ldots + l_m\sin^m\varphi},$$

et en coordonnées rectangulaires

$$(x^2+y^2)(a_{m-1}y^{m-1}+b_{m-1}y^{m-2}x+\ldots+k_{m-1}x^{m-1})$$
$$+m(a_m y^m+b_m y^{m-1}x+\ldots+l_m x^m)=0;$$

d'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Si d'un point* O *l'on abaisse les perpendiculaires* OA_1, OA_2, ..., OA_m *sur les tangentes à une courbe* C *parallèles à une direction* Δ, *le centre des moyennes harmoniques* A *des points* A_1, A_2, ..., A_m *décrit, quand* Δ *varie, une courbe d'ordre* $m+1$ *passant par les points cycliques, ayant à l'origine un point multiple d'ordre* m *et admettant, comme tangentes en ce point, les tangentes à la courbe* C *issues de l'origine.*

Si la courbe C est un cercle, le lieu du point A est une cubique circulaire unicursale droite, et, réciproquement, il est aisé de voir que toute cubique circulaire unicursale droite peut être obtenue par ce mode de génération.

Il existe une classe de courbes algébriques qui jouissent de propriétés intéressantes et que nous voulons signaler; ce sont celles dont les tangentes parallèles à une direction Δ se divisent en couples tels que le produit des distances à l'origine d'un couple de tangentes soit constant et égal à R^2. Mais auparavant nous allons indiquer quelques propriétés de la transformation suivante, dont le lien avec notre sujet est manifeste :

Étant donnée une courbe C *de classe* m, *on mène la tangente à cette courbe en un point* M *et sur la perpendiculaire* OP *abaissée d'un point fixe* O *sur cette tangente on prend une longueur* OP_1 *telle que*

$$OP\times OP_1=R^2;$$

étudier la courbe enveloppée par la parallèle à la tangente menée par le point P_1.

On voit que, les courbes C et C_1 étant polaires réciproques par rapport au cercle de rayon R et de centre O, la transformation peut être définie de la façon suivante :

Étant données deux courbes polaires réciproques C *et* C_1, *étudier la courbe enveloppée par les droites menées par les différents points de* C_1, *parallèlement aux tangentes à la courbe* C *aux points correspondants.*

Les coordonnées tangentielles polaires des droites PM et P_1M_1 sont liées par la relation

$$p_1 = \frac{R^2}{p}, \qquad \varphi_1 = \varphi,$$

et les coordonnées tangentielles ordinaires par les relations

$$u_1 = \frac{u}{R^2(u^2+v^2)}, \qquad v_1 = \frac{v}{R^2(u^2+v^2)},$$

qu'il est impossible de ne pas rapprocher des formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Les formules

$$(9) \qquad \begin{cases} x = p\cos\varphi - p'\sin\varphi, \\ y = p\sin\varphi + p'\cos\varphi, \end{cases}$$

donnent pour les coordonnées du point M_1 où la droite P_1M_1 touche son enveloppe

$$x_1 = \frac{R^2}{p^2}(p\cos\varphi - p'\sin\varphi),$$

$$y_1 = \frac{R^2}{p^2}(p\sin\varphi - p'\cos\varphi).$$

et, par suite, en appelant r et r_1 les rayons vecteurs des points M et M_1, on a

$$r_1^2 = \frac{R^4}{p^4} r^2,$$

d'où

$$\frac{r_1}{r} = \pm \frac{R^2}{p^2} = \pm \frac{p_1}{p};$$

on voit aisément en faisant la figure qu'il faut prendre le signe —, et, par suite, l'on a

$$\frac{r_1}{r} + \frac{p_1}{p} = 0,$$

d'où la construction très simple suivante :

Pour avoir le point où la droite P_1M_1 *touche son enveloppe, mener la droite* OM *qui coupe* P_1M_1 *en* M'_1, *et prendre le symétrique du point* M'_1 *par rapport au point* P_1.

Le rayon de courbure au point M_1 est donné par la formule

$$\rho_1 = -(p_1 - p''_1),$$

c'est-à-dire

$$\rho_1 = -\frac{R^2}{p^3}(p^2 + 2p'^2 - pp''),$$

expression qui, après une transformation facile, s'écrit

$$\rho_1 = -\frac{R^2}{p^3}(2r^2 + p\rho),$$

c'est-à-dire

$$(19) \qquad \rho_1 + \frac{R^2}{p^2}\rho - \frac{2R^2r^2}{p^3} = 0.$$

Mais on a

$$R^2 = pp_1,$$
$$p = r\sin V,$$
$$p_1 = r_1 \sin V,$$

V désignant l'angle OMP, r_1 le rayon vecteur OM_1. La relation (19) s'écrit

$$\frac{\rho_1}{r_1} + \frac{\rho}{r} + \frac{2}{\sin V} = 0. \tag{20}$$

C'est la formule que nous voulions établir.

Revenons aux courbes que nous avons signalées plus haut, et remarquant que ce sont des antipodaires de courbes anallagmatiques, nous conviendrons de les désigner sous le nom d'*anallagmatiques tangentielles*. Il faut rappeler que le type général des équations de degré m, réciproques suivant le module R^2, c'est-à-dire telles que les racines se divisent en couples dont le produit soit égal à R^2, est

$$\left\{\begin{aligned} &a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots \\ &\qquad + R^{m-4} a_2 x^2 + R^{m-2} a_1 x + R^m a_0 = 0, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

de telle sorte que l'on a, en général,

$$a_p = R^{m-2p} a_{m-2p},$$

c'est-à-dire que les coefficients équidistants des extrêmes sont égaux à une puissance de R^2 près.

Il faut de plus que m soit pair, puisque les racines vont par couples. Posons donc $m = 2\mu$. L'équation

$$\begin{aligned} a_0 p^{2\mu} + p^{2\mu-1} \varphi_1(\cos\varphi, \sin\varphi) + p^{2\mu-2} \varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi) + \dots \\ + R^{2(\mu-2)} p^2 \varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ + R^{2(\mu-1)} p\, \varphi_1(\cos\varphi, \sin\varphi) + R^{2\mu} a_0 = 0 \end{aligned}$$

ou, en coordonnées tangentielles ordinaires,

$$\begin{aligned} a_0 R^{2\mu}(u^2 + v^2)^\mu + R^{2(\mu-1)}(u^2 + v^2)^{\mu-1} \varphi_1(u, v) \\ + R^{2(\mu-2)}(u^2 + v^2)^{\mu-2} \varphi_2(u, v) + \dots \\ + \varphi_2(u, v) + \varphi_1(u, v) + a_0 = 0 \end{aligned}$$

représente une famille d'anallagmatiques tangentielles de classe m. Mais ce ne sont pas les seules anallagmatiques tangentielles de classe m. En effet, l'équation

$$\begin{aligned} p^2 \varphi_{m-2}(\cos\varphi, \sin\varphi) + p\, \varphi_{m-1}(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ + R^2 \varphi_{m-2}(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$(22)\quad R^2(u^2+v^2)\,\varphi_{m-2}(u,v)+\varphi_{m-1}(u,v)+\varphi_{m-2}(u,v)$$

représente encore une famille de courbes de classe m répondant à la question.

Si l'on suppose que u et v, au lieu de représenter les coordonnées d'une droite, représentent les coordonnées d'un point (x,y), l'équation (22) devient

$$R^2(x^2+y^2)\,\varphi_{m-2}(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\varphi_{m-2}(x,y)=0.$$

Ces courbes, transformées par dualité des courbes (22), ont été rencontrées par M. Picquet (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 460). C'est M. Picquet qui a montré le premier que : « outre les courbes du quatrième degré qui passent deux fois par les points cycliques, courbes désignées par les géomètres anglais sous le nom de *quartiques bicirculaires*, qui sont les seules courbes anallagmatiques de ce degré qui ont été considérées par les savants qui ont traité de ce sujet, il convient encore de ranger dans cette catégorie les courbes du quatrième degré qui ont un point double et dont les quatre points à l'infini sont les points cycliques une fois et les deux autres respectivement sur les tangentes au point double. »

De même, les anallagmatiques de quatrième classe se divisent en deux familles qui ont respectivement pour équations

$$(23)\quad \begin{cases} a_0p^4+p^3\varphi_1(\cos\varphi,\sin\varphi)+p^2\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi) \\ \qquad +R^2p\,\varphi_1(\cos\varphi,\sin\varphi)+a_0R^4=0 \end{cases}$$

et

$$(24)\quad \begin{cases} p^2\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi)+p\,\varphi_3(\cos\varphi,\sin\varphi) \\ \qquad +R^2\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi)=0 \end{cases}$$

ou, en coordonnées tangentielles ordinaires,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &a_0 R^4(u^2+v^2)^2+R^2(u^2+v^2)\varphi_1(u,v)\\ &\qquad\qquad +\varphi_2(u,v)+\varphi_1(u,v)+a_0=0,\end{aligned}\right.$$

$$(26)\quad R^2(u^2+v^2)\varphi_2(u,v)+\varphi_3(u,v)+\varphi_2(u,v)=0.$$

Les premières correspondent aux quartiques bicirculaires. Les autres sont caractérisées par les propriétés suivantes :

Elles sont bitangentes à la droite de l'infini et ont un foyer tel que les tangentes issues de ce point vont passer par les points de contact de la courbe et de la droite de l'infini.

Comme cas particulier de l'équation (24) considérons l'équation

$$(24')\quad \left\{\begin{aligned} &p^2\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi)+p\varphi_1(\cos\varphi,\sin\varphi)\\ &\qquad\qquad +R^2\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi)=0.\end{aligned}\right.$$

Soient p_1 et p_2 les racines de l'équation (24′) et posons $2p=p_1+p_2$. On a

$$(27)\qquad 2p=-\frac{\varphi_1(\cos\varphi,\sin\varphi)}{\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi)}$$

ou, en coordonnées tangentielles ordinaires,

$$(28)\qquad (u^2+v^2)\varphi_1(u,v)+2\varphi_2(u,v)=0.$$

Mais si nous supposons que, dans les équations (24′) et (27), p et φ désignent des coordonnées polaires ordinaires, ces équations représentent des courbes qui ont pour équations en coordonnées rectangulaires

$$(29)\quad (x^2+y^2)\varphi_2(x,y)+(x^2+y^2)\varphi_1(x,y)+R^2\varphi(x,y)=0$$

et

$$(30)\qquad 2\varphi_2(x,y)+\varphi_1(x,y)=0.$$

L'équation (28) est l'équation tangentielle de la déférente de l'anallagmatique de seconde espèce (29) ou de l'antipodaire de la conique (30).

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Si l'on considère l'anallagmatique (24′) *du quatrième ordre et de seconde espèce, le lieu du milieu de la corde qui joint deux points correspondants est une conique qui passe à l'origine et dont les points à l'infini sont sur les tangentes à l'origine à l'anallagmatique. La déférente est une courbe du quatrième ordre et de troisième classe, c'est-à-dire une quartique à trois rebroussements. C'est l'antipodaire de la conique précédente. Elle a pour foyer l'origine et elle est bitangente à la droite de l'infini aux points situés sur les tangentes à l'origine à l'anallagmatique.*

QUELQUES COURBES CÉLÈBRES.

Courbe $p = a\varphi$. — Considérons la courbe dont l'équation est

$$p = a\varphi. \tag{31}$$

Pour reconnaître la nature de cette courbe, le moyen le plus simple consiste à recourir aux formules (11) qui donnent

$$\alpha = -a\sin\varphi,$$
$$\beta = \quad a\cos\varphi;$$

d'où

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2.$$

La courbe est une développante de cercle et comme l'équation (31) en coordonnées polaires ordinaires représente une spirale d'Archimède, on a ce théorème :

La podaire de la développante d'un cercle C *par rapport au centre du cercle* C *est une spirale d'Archimède ayant pour pôle le centre du cercle* C.

Courbe $p = \frac{a}{\varphi}$. — Cette courbe est l'antipodaire d'une spirale hyperbolique ; on voit encore que les tangentes de cette courbe sont les transformées par rayons vecteurs réciproques des tangentes d'une développante de cercle, la transformation étant celle que nous avons définie plus haut.

On sait que la propriété caractéristique de la spirale hyperbolique

$$\rho = \frac{a}{\omega}$$

est d'avoir une sous-normale constante, propriété exprimée par la formule

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{1}{a}.$$

De même de l'équation $p = \frac{a}{\varphi}$ on déduit

$$\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{a},$$

d'où

$$\frac{p}{p'} = -\varphi.$$

On a ensuite

$$x = \frac{a}{\varphi^2}(\varphi \cos\varphi + \sin\varphi),$$

$$y = \frac{a}{\varphi^2}(\varphi \sin\varphi - \cos\varphi);$$

$$\alpha = \frac{a}{\varphi^3}(\varphi \sin\varphi - 2\cos\varphi),$$

$$\beta = \frac{a}{\varphi^3}(\varphi \cos\varphi + 2\sin\varphi),$$

et, par suite,

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2}{\varphi^4}(1 + \varphi^2), \qquad r = \frac{p}{a}\sqrt{p^2 + a^2},$$

$$r_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2}{\varphi^6}(4 + \varphi^2), \qquad r_1 = \frac{p^2}{a^2}\sqrt{4p^2 + a^2},$$

formules qui permettent de déterminer le point M où la tangente touche son enveloppe, et le centre de courbure au point M.

Courbe $p = ae^{\varphi}$. — De l'équation

$$p = ae^{\varphi}, \tag{32}$$

qui représente une spirale logarithmique, on déduit immédiatement

$$p' = ae^{\varphi}, \qquad p'' = ae^{\varphi}, \qquad \ldots;$$

d'où

$$\rho = -2p.$$

On a ensuite

$$\left\{\begin{aligned} x &= ae^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi), \\ y &= ae^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi), \\ \alpha &= -ae^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi), \\ \beta &= ae^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi). \end{aligned}\right. \tag{33}$$

On en déduit, en désignant par r le rayon vecteur d'un point de la courbe,

$$r^2 = 2ae^{2\varphi};$$

d'où

$$r = p\sqrt{2}.$$

Les formules (33) donnent ensuite

$$\beta = x, \qquad \alpha = -y.$$

L'équation

$$p = \frac{a}{e^{\varphi}} = ae^{-\varphi}$$

représente évidemment aussi une spirale logarithmique et les coordonnées (x, y) d'un point de cette nouvelle courbe s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} x &= ae^{-\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi), \\ y &= ae^{-\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi). \end{aligned}$$

Des formules précédentes résultent la plupart des propriétés de la spirale logarithmique.

Tout d'abord on voit que les formules

$$\frac{x}{a} = e^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

$$\frac{y}{a} = e^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

représentent une spirale logarithmique (*Journal de Mathématiques spéciales*, p. 172).

Dans la spirale logarithmique, les rayons vecteurs qui partent du pôle coupent la courbe sous un angle constant.

Le rayon de courbure de la courbe en un point est égal à deux fois la distance du pôle à la tangente en ce point.

La projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant.

Le lieu des extrémités de la sous-normale polaire coïncide avec la développée de la spirale logarithmique.

La développée, la podaire, l'antipodaire, la polaire réciproque, la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une spirale logarithmique sont des spirales logarithmiques.

Courbes $\rho^m = a^m \sin m\varphi$. — De cette équation on déduit

$$\rho^{m-1}\rho' = a^m \cos m\varphi,$$

et, par suite, en appelant V l'angle sous lequel le rayon vecteur coupe la courbe au point M, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tang} m\varphi;$$

d'où

$$V = m\varphi,$$

c'est-à-dire que l'angle V varie proportionnellement à φ. « La courbe s'infléchit d'un mouvement uniforme sur le rayon vecteur quand celui-ci tourne lui-même d'un mouvement uniforme. » (*Nouvelles Annales*, 1883, p. 118.)

Ce résultat était d'ailleurs évident, puisque la podaire d'une spirale à inflexion proportionnelle est une spirale de même nature.

Le rayon de courbure donné par la formule

$$\rho = -(p + p'')$$

est égal à

$$\rho = (m-1) a \sin^{\frac{1}{m}-2} m\varphi,$$

formule qui peut s'écrire

$$\rho = \frac{(m-1)p}{\sin^2 m\varphi}.$$

Mais si l'on appelle N la portion de normale comprise entre la courbe et la perpendiculaire au rayon vecteur au pôle, on voit facilement que l'on a (*Nouvelles Annales*, 1883, p. 126)

$$\rho = (m-1)\mathrm{N}.$$

Cette propriété peut servir à déterminer le centre de courbure de la courbe en un point.

APPLICATIONS DIVERSES.

Théorème fondamental de la théorie des développées. — En désignant par ds et $d\sigma$ les différentielles des arcs d'une courbe et de sa développée, on a les formules

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi},$$

$$ds = -(p + p'')\, d\varphi,$$

$$d\sigma = -(p' + p''')\, d\varphi:$$

d'où

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi},$$

$$d\sigma - d\rho = 0,$$

$$\sigma - \rho = \text{const.}$$

Coordonnées intrinsèques. — La position d'un point M sur une courbe C est fixée, si l'on connaît la longueur de l'arc qui sépare le point M d'une origine fixe O, choisie sur la courbe, c'est-à-dire la distance du point M au point O évaluée sur la courbe. Le rayon de courbure ρ de la courbe au point M est une fonction de l'arc OM $= s$,

$$\rho = \varphi(s).$$

Cette équation est l'équation intrinsèque de la courbe; intrinsèque, parce qu'elle permet d'étudier les propriétés de la courbe sans l'intervention d'aucun élément extérieur.

Quand on connaît l'équation tangentielle polaire d'une courbe, il est facile, au moins théoriquement, d'obtenir son équation intrinsèque. En effet, soit

$$p = f(\varphi)$$

l'équation de la courbe. On a les relations

$$ds = \rho\, d\varphi,$$

$$\rho = -(p + p'') = -f(\varphi) - f''(\varphi);$$

d'où l'on déduit

$$ds = -(p + p'')\, d\varphi = -f(\varphi)\, d\varphi - f''(\varphi)\, d\varphi,$$

$$s = -\int f(\varphi)\, d\varphi - f'(\varphi);$$

en éliminant φ entre cette équation et l'équation qui donne ρ, on obtient une relation entre s et ρ, c'est-à-dire l'équation intrinsèque de la courbe.

Prenons comme exemple la courbe enveloppée par une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires; c'est-à-dire une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Son équation, facile à obtenir, est

$$p = R \sin^2\varphi;$$

on en déduit

$$\rho = -(p + p'') = 3R \sin 2\varphi = 3p:$$

d'où ce théorème :

Le rayon de courbure de l'hypocycloïde à quatre rebroussements en un point est égal à trois fois la distance du centre de la courbe à la tangente en ce point. (Voir *Nouvelles Annales,* 1886, p. 278. Le théorème est attribué à M. Lamarle.)

On a ensuite

$$\begin{aligned} s &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} R \sin 2\varphi \, d\varphi - 2R \cos 2\varphi, \\ &= -\tfrac{3}{2} R \cos 2\varphi, \\ \rho &= \quad 3R \sin 2\varphi; \end{aligned}$$

par suite,

$$4s^2 + \rho^2 = 9R^2:$$

c'est l'équation intrinsèque de la courbe; les arcs sont comptés à partir du point qui se trouve sur la bissectrice de l'angle yOx. L'arc compris entre deux points de rebroussements est égal à $3R$, d'où ce théorème :

La longueur de l'hypocycloïde à quatre rebroussements est douze fois le rayon du cercle inscrit.

L'équation

$$p = R \sin 2\varphi$$

représente en coordonnées polaires ordinaires la podaire de l'hypocycloïde par rapport à son centre; c'est une rosace à quatre branches.

Comme second exemple, prenons l'hypocycloïde a trois rebroussements. Son équation tangentielle est

$$4Rv^2u-(u^2+v^2)=0.$$

On y arrive facilement en la considérant comme l'enveloppe d'une droite dont le milieu de la portion comprise entre les axes décrit le cercle qui a pour équation

$$x^2+y^2-2Rx=0.$$

En coordonnées tangentielles polaires, l'équation précédente devient

$$p=4R\sin^2\varphi\cos\varphi=2R\sin2\varphi\cos\varphi,$$

ou par une transformation facile

$$p=R(\cos\varphi-\cos3\varphi).$$

On a par suite

$$p'=R(-\sin\varphi+3\sin3\varphi),$$
$$p''=R(-\cos\varphi+9\cos3\varphi):$$

d'où

$$\rho=-8R\cos3\varphi,$$
$$s=-8R\int_0^\varphi\cos3\varphi=-\frac{8}{3}R\sin3\varphi$$

et, par suite,

$$\rho^2+9s^2=64R^2:$$

c'est l'équation intrinsèque de l'hypocycloïde; l'origine est un sommet de la courbe. La longueur d'un arc compris entre deux points de rebroussement est $\frac{16}{3}R$, d'où ce théorème :

La longueur de l'hypocycloïde est seize fois le rayon du cercle inscrit.

Les formules

$$p = R(\cos\varphi - \cos 3\varphi),$$
$$\rho = -8R\cos 3\varphi$$

donnent

$$p - R\cos\varphi = \frac{\rho}{8}.$$

De là résulte le théorème suivant, dû à M. de Longchamps (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884) :

Le rayon de courbure de l'hypocycloïde à trois rebroussements en un point est égal à huit fois la distance du centre de la courbe à la tangente en ce point.

L'équation

$$p = R(\cos\varphi - \cos 3\varphi)$$

est l'équation de la podaire de l'hypocycloïde ; c'est un folium double.