Nouvelles annales de mathématiques

Louis Bossut

Étude de statique physique. Calcul des actions mutuelles des solides en contact

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 239-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__239_1>

ÉTUDE DE STATIQUE PHYSIQUE.
CALCUL DES ACTIONS MUTUELLES DES SOLIDES EN CONTACT;

PAR M. LOUIS BOSSUT,
Capitaine du Génie.

1. *Hypothèses.* — Nous admettrons dans la suite que, lorsqu'une barre élastique de longueur L, de section transversale ω et de module d'élasticité E s'allonge d'une quantité λ sous l'action d'une force f dirigée suivant son axe longitudinal, on a la relation

$$(1) \qquad f = \frac{E\omega}{L}\lambda$$

ou

$$f = \mu\lambda, \tag{2}$$

en posant

$$\mu = \frac{E\omega}{L}. \tag{3}$$

La forme (2) montre que le déplacement λ de l'extrémité libre de la barre est représenté par le même nombre que la vitesse λ que prendrait, sous l'action d'une percussion f, un point matériel de masse μ. Cette analogie nous permet de substituer à l'étude d'un allongement celle de la vitesse d'un point matériel; c'est de cette remarque que découle la simplicité de la méthode.

2. *Des barres élastiques situées dans un même plan forment un faisceau au sommet* S *duquel est appliquée une force* F. *Les extrémités distinctes des barres sont reliées à charnière à des corps fixes et l'on demande comment la force* F *se répartit le long des différentes barres dont on connaît d'ailleurs les masses fictives*

$$\mu = \frac{E\omega}{L}$$

qui varient d'une barre à l'autre.

Supposons le problème resolu et appelons $f_1, f_2, \ldots, f, \ldots, f_n$ les composantes cherchées. Sous l'action de l'une quelconque d'entre elles f_i par exemple, le sommet S se déplace suivant SA_i, d'une quantité λ_i donnée par la relation

$$f_i = \mu_i\lambda_i, \tag{4}$$

et le déplacement réel du sommet S est la résultante de tous les déplacements analogues.

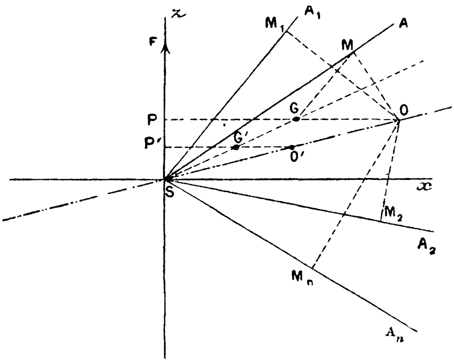
Prenons, sur chacune des directions émanant de S et à une distance quelconque de ce point, un point M et supposons tous ces points entraînés simultanément le long des barres sur lesquelles ils se trouvent, de telle sorte que le point M se déplace de λ, le point M_i de λ_i, ... Si nous affectons chacun de ces points de la masse μ afférente à la barre correspondante, nous voyons qu'à l'étude des déplacements composants du sommet S, nous pourrons substituer celle des déplacements des points M ou, ce qui revient au même, celle des vitesses initiales qui leur seraient communiquées dans la direction des barres sous l'action de la percussion F. Connaissant λ_i, la composante correspondante sera donnée par la relation (4).

Lorsque les points M occupent des positions quelconques sur les barres, l'étude de leur mouvement initial est assez compliquée, car ils forment une figure déformable. Il en serait tout autrement si les distances de ces points deux à deux restaient invariables, car leur ensemble se déplacerait tout d'un bloc, à la façon d'un solide invariable; il semble donc tout naturel, puisqu'on dispose des distances des points au sommet S de chercher s'il existe un ensemble de points M_i formant une figure indéformable qui, soumise à l'action de la percussion F, acquerrait en chacun de ses points une vitesse dirigée suivant une direction connue SA_i.

Supposons le problème résolu et prenons pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires dont l'une Sz se confonde avec la ligne d'action de la force F.

Puisque l'ensemble des points M forme une figure invariable, son mouvement initial est une rotation instantanée autour d'un certain centre O; en outre, comme les vitesses doivent être dirigées suivant les rayons SA, les points M se confondent forcément avec les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur ces rayons SA. Tout revient donc à déterminer le point O, ce à quoi l'on arrive bien simplement.

Fig. 1.



On sait, en effet, que le centre instantané se trouve sur la perpendiculaire OP abaissée du centre de gravité G de l'ensemble des points M, sur la direction de la force F et à une distance OG de ce point telle qu'on ait la relation

$$(5) \qquad \mathrm{OG} \times \mathrm{GP} = \frac{\Sigma \mu \rho^2}{\Sigma \mu},$$

en appelant $\frac{\Sigma \mu \rho^2}{\Sigma \mu}$ le carré du rayon de gyration de l'ensemble des points par rapport à un axe perpendiculaire au tableau et passant par le centre de gravité. Donc, si l'on appelle α, γ les coordonnées du centre cherché et θ l'angle que fait, avec Sx, l'une quelconque des directions données et si l'on exprime analytiquement :

1° Que le centre de gravité des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les directions SA a même ordonnée que ce point O;

2° Que la relation (5) est satisfaite.

On trouve qu'il y a une infinité de centres O satisfaisant à la question, lesquels sont tous alignés sur la droite

$$(6) \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\Sigma \mu \sin\theta \cos\theta}{\Sigma \mu \cos^2\theta}.$$

Si l'on appelle p la distance OM et δ la longueur OP, on a, en général,

$$(7) \qquad f = \mu F \frac{p \times p}{\Sigma \mu p^2}.$$

La considération d'un autre centre O' situé sur la droite (6) aurait conduit à la même valeur de f à cause de l'homologie des deux figures correspondantes.

3. *Conséquences des formules précédentes.* — La seule inspection des équations (6) et (7) conduit aux résultats suivants :

(a). Si l'on prolonge indéfiniment la ligne des centres instantanés, elle partage le plan en deux régions telles que les barres situées dans l'une travaillent à l'extension, tandis que celles qui sont situées dans l'autre sont comprimées.

(b). Lorsque le numérateur de (6) est nul, la ligne des centres instantanés est perpendiculaire à la direction de la force; par suite, la distance du point S au point instantané est constante, et le déplacement de ce sommet est un arc de cercle décrit autour du centre instantané.

(c). Lorsque les propriétés élastiques des différentes barres sont les mêmes, les relations de position des barres entre elles et avec la ligne d'action de la force interviennent seules pour modifier les valeurs des composantes dont l'expression générale peut s'écrire

$$(8) \qquad f = F \frac{\Sigma \sin\theta \cos\theta}{\Sigma \cos^2\theta} \frac{\sin\theta \, \Sigma \cos^2\theta - \cos\theta \, \Sigma \sin\theta \cos\theta}{\Sigma \sin^2\theta \cos^2\theta - (\Sigma \sin\theta \cos\theta)^2}$$

ou

$$f = F \frac{\Sigma xz}{\Sigma x^2} \frac{z \Sigma x^2 - x \Sigma xz}{\Sigma x^2 z^2 - (\Sigma xz)^2}, \tag{9}$$

en appelant x et z les coordonnées des points qui se trouvent sur chacune des directions SA à une distance de S égale à l'unité.

Les actions qui s'exercent suivant deux directions symétriques par rapport à la ligne des centres instantanés sont égales, et elles sont proportionnelles au cosinus de l'angle de la barre considérée avec la même ligne.

4. *Transmission des pressions dans les solides isotropes.* — Un solide isotrope est celui dont les propriétés élastiques sont les mêmes dans n'importe quelle direction autour de ses différents points; on peut donc le regarder comme formé d'une infinité de barres de même module de résistance, $\mu = 1$, émanant du point d'application de la force dont on étudie l'action. On suppose le corps limité par une surface plane et indéfini d'un côté de cette surface.

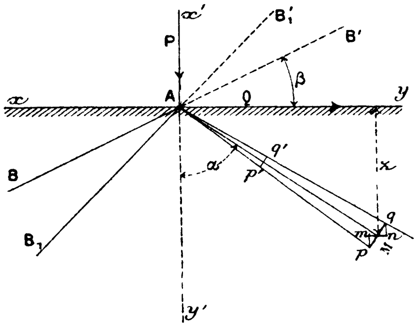
Premier cas. — *La force donnée* P *est normale à la surface du corps.*

Par raison de symétrie, la résultante de toutes les actions qui s'exercent le long des barres situées dans un même plan vertical passant par F est constante; appelons-la p et appliquons les formules précédentes à l'un quelconque des faisceaux verticaux plans. Le centre instantané se trouve sur une droite perpendiculaire à P et la pression qui s'exerce le long d'une des barres sur l'unité de surface d'un élément $p'q'$, normal à la barre et situé à l'unité de distance de A, a pour expression

$$f_n = \frac{2p\cos\alpha}{\pi}. \qquad (10)$$

Pour calculer p, on remarque que la projection sur

Fig. 2.



la verticale de toutes les forces f_n est égale à p, et l'on obtient ainsi

$$p = \frac{3P}{4}. \qquad (11)$$

Enfin de f_n on tire la valeur de la pression qui s'exerce par unité de surface sur un élément mn, parallèle à la surface-limite et situé à la distance R du point d'application de la force, par la relation simple

$$f = f_n \frac{\cos\alpha}{R^2}, \qquad (12)$$

qui découle de la considération de la figure ci-contre, dans laquelle on a $mn = 1$ et $AM = R$. En associant (10), (11) et (12), on trouve donc

$$f = \frac{3P\cos^2\alpha}{2\pi R^2} \qquad (13)$$

et, en appelant z la profondeur de l'élément considéré au-dessous de xy,

$$f = \frac{3P}{2\pi R^2} \times \frac{z^2}{R^2}. \tag{14}$$

C'est la formule donnée par M. Boussinesq [1].

DEUXIÈME CAS : *La force donnée Q agit tangentiellement à la surface limite.*

On ramène ce cas au précédent : pour cela prenons comme plan du tableau un plan vertical passant par Q et menons par A, point d'application de Q, un plan perpendiculaire à cette force. Supposons prolongées au delà du point A en AB' ... les barres situées à gauche de ce plan : à une action suivant AB correspondrait, dans le faisceau AB', une action égale et contraire; par suite, on peut obtenir les valeurs absolues des actions cherchées, en substituant au solide idéal primitif un solide limité par le plan X'Y' et auquel Q est perpendiculaire.

Donc, en appelant β l'angle de la direction considérée avec Q et α l'angle de cette même direction avec la trace $x'y'$, on aura pour valeur de l'action par unité de surface d'un élément parallèle à xy

$$f' = \frac{3Q}{2\pi R^2} \cos\alpha \cos\beta. \tag{15}$$

TROISIÈME CAS : *La force donnée a une direction quelconque par rapport à la surface limite.*

Ce cas résulte des deux précédents, puisqu'on peut décomposer la force en deux autres, l'une normale et

---

[1] BOUSSINESQ, *Application des potentiels à l'etude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.* Gauthier-Villars; 1885.

l'autre tangentielle, et appliquer la loi de la superposition des effets des petites forces; on trouve ainsi, en appelant V l'angle que fait la ligne d'action de la force donnee avec la direction que l'on considère,

$$(16) \qquad F = \frac{3P}{2\pi R^2}\,\frac{z}{R}\cos V.$$

Donc, en général :

Toute action extérieure exercée en un point de la surface d'un solide isotrope se transmet à l'intérieur, sur les couches parallèles à la surface limite, sous la forme de pressions dirigées exactement à l'opposé de ce point et qui égalent, pour l'unité d'aire, le produit du coefficient $\frac{3}{2\pi}$ *par la composante* P cos V *suivant leur propre sens de la force extérieure donnée par l'inverse du carré de la distance* R *au point d'application et par le rapport de la profondeur* z *de la couche à cette même distance* (Boussinesq, *loc. cit.*).

Nous n'insisterons pas davantage sur ces remarquables formules, notre but étant uniquement de montrer qu'on peut les obtenir par des considérations presque élémentaires, dont l'un des plus grands avantages consiste à faire voir pourquoi et comment s'introduisent les différents facteurs, ce que ne peut donner le calcul seul.

5. *Décomposition d'une force suivant les barres d'une gerbe.* — Ce problème se résout en déterminant les valeurs des composantes qui agiraient le long des barres des faisceaux plans obtenus en projetant sur trois plans coordonnés les barres de la gerbe et la force qui agit en son sommet.

6. *Une figure plane de forme quelconque, mais invariable, est soumise à l'action d'une force donnée* P *située dans son plan; elle repose sur les sommets* S_1, S_2, ..., S_n *de n faisceaux de barres élastiques toutes situées dans le plan de la figure et articulées à charnière avec des corps fixes, et l'on demande les actions qui s'exercent suivant les différentes barres.*

Des considérations analogues à celles du n° 2 montrent qu'il existe, dans le plan, une figure invariable de forme et une seule, composée de points matériels affectés de masses convenables, et telle que chacun de ses points prendrait, sous l'action d'une percussion P appliquée à leur ensemble, une vitesse dirigée suivant la barre correspondante et égale au déplacement composant du sommet situé sur cette barre. Le centre instantané O se trouve à l'intersection des deux droites

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \gamma\Sigma\mu k\cos^2\theta - \alpha\Sigma\mu k\sin\theta\cos\theta - \Sigma\mu k^2\cos^2\theta = 0, \\ \gamma\Sigma\mu\ \cos^2\theta - \alpha\Sigma\mu\ \sin\theta\cos\theta - \Sigma\mu k\ \cos^2\theta = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on appelle p la distance du centre instantané O à une barre et $\mathfrak{M}_t P$ le couple de rotation ; la composante suivant cette barre a pour valeur

$$(18)\qquad f = \mu p\,\frac{\mathfrak{M}_t P}{\Sigma\mu p^2}.$$

La pression qui supporte l'un des sommets est la résultante des actions f qui s'exercent le long des barres aboutissant à ce sommet.

Si, au lieu de se trouver dans un plan, les barres forment des gerbes dans l'espace, on traitera la même question au moyen de projections faites sur trois plans coordonnés.

7. *Étude d'un cas particulier très important.* — Le numéro précédent résout dans toute sa généralité le problème qui consiste à déterminer les pressions qu'un solide invariable exerce sur ses points d'appui, quand ceux-ci appartiennent à des solides élastiques naturels quelconques.

Si l'on veut dégager de la loi générale de répartition ainsi obtenue celle qui ne dépend que des positions relatives des points d'appui et des forces, il n'y a qu'à supposer que les propriétés élastiques des corps auxquels appartiennent ces points sont les mêmes pour chacun d'eux et quelle que soit la direction considérée.

En traitant sur ces nouvelles bases le problème du numéro précédent, on arrive à ce résultat remarquable, à savoir que :

Lorsqu'un solide invariable repose sur un ensemble de corps solides isotropes, les pressions qu'il exerce sur ses points d'appui sont égales aux quantités de mouvement que prendraient, à partir du repos et sous l'action d'une percussion égale à la force donnée, des points matériels de masses égales formant un solide invariable et se confondant à l'origine du mouvement avec les points d'appui.

L'énoncé précédent est encore vrai, lorsque les appuis appartiennent à des solides isotropes de nature différente, pourvu qu'on affecte de masses convenables les points matériels.

Ceci posé, on peut trouver facilement l'expression des composantes des pressions qui s'exercent sur chacun des appuis; pour cela il n'y a qu'à étudier, suivant la méthode connue, le mouvement initial de l'ensemble des points.

On les rapporte à trois axes de coordonnées se confondant avec leurs axes principaux d'inertie, et l'on étudie successivement l'influence de la percussion de translation et du couple de percussion qu'on peut substituer à la force donnée.

En désignant par ΣX, ΣY, ΣZ les composantes du système de forces donné, L, M, N les couples composants, enfin A, B, C les moments principaux d'inertie, on trouve, pour valeurs des composantes en un point x, y, z,

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{\Sigma X}{n} - y\frac{N}{C} + z\frac{M}{B}, \\ \eta &= \frac{\Sigma Y}{n} - z\frac{L}{A} + x\frac{N}{C}, \\ \zeta &= \frac{\Sigma Z}{n} - x\frac{M}{B} + y\frac{L}{A}; \end{aligned} \right.$$

ou

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \mu\frac{\Sigma X}{\Sigma\mu} - \mu y\frac{N}{C} + \mu z\frac{M}{B}, \\ \eta &= \mu\frac{\Sigma Y}{\Sigma\mu} - \mu z\frac{L}{A} + \mu x\frac{N}{C}, \\ \zeta &= \mu\frac{\Sigma Z}{\Sigma\mu} - \mu x\frac{M}{B} + \mu y\frac{M}{B}, \end{aligned} \right.$$

suivant que tous les appuis appartiennent à des corps de même nature ou à des corps qu'on doit caractériser par la masse fictive μ en vue de faire intervenir leurs propriétés élastiques.

On sait que le travail produit par une force T agissant sur un corps élastique a pour expression $\frac{1}{2\mu}T^2$; si l'on calcule la somme des travaux des pressions sur les points d'appui, on trouve, dans le cas, par exemple, où $\mu = 1$ pour tous les points,

$$(21)\quad \sum \frac{1}{2\mu}T^2 = \frac{\Sigma R^2}{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right).$$

Cette expression satisfait au principe du travail minimum, principe qui s'énonce ainsi :

Quand un système élastique quelconque se met en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail développé dans l'extension ou la compression des liens ou des points d'appui, par suite des déplacements relatifs des points du système; ou, en d'autres termes, le travail développé par des forces intérieures est un minimum.

L'expression (21) démontre encore ce théorème important :

Le travail total produit pendant la déformation est le même pour tous les systèmes d'appui ayant mêmes axes principaux d'inertie et mêmes moments principaux d'inertie.

8. *Pressions sur des surfaces d'appui.* — Si, au lieu d'être isolés, les points d'appui forment des surfaces continues, la question se traite aussi simplement et les formules obtenues sont complètement analogues à (19) et (20). Elles montrent immédiatement, et entre autres choses, que, lorsque tous les corps ont même constante d'isotropie qu'on peut prendre égale à l'unité :

1° Si le système de forces donné se réduit à une force unique, passant par le centre de gravité de toutes les surfaces, les pressions résultantes sur chacune d'elles sont proportionnelles à leur aire et passent par les centres de gravité de celles-ci;

2° Si, le système de forces étant quelconque, la surface d'appui considérée a même centre de gravité et mêmes axes principaux d'inertie que l'ensemble des surfaces, la résultante de translation des pressions qu'elle supporte est proportionnelle à son aire; quant aux couples résultants, ils ont pour expressions, en appelant A′, B′, C′ les moments principaux d'inertie de la surface considérée,

$$(22) \qquad L' = L\,\frac{A'}{A}, \qquad M' = M\,\frac{B'}{B}, \qquad N' = N\,\frac{C'}{C}.$$

9. *Discussion des formules en* ξ, η, ζ (20) *et* (21). — Nous n'exposerons pas cette question que le lecteur traitera lui-même; nous voulons seulement faire remarquer qu'on arrive facilement au but en substituant une discussion géométrique à celle des formules en ξ, η, ζ.

On remarque, en effet, que, d'après ce qui a été dit n° 7, la pression en un point est la résultante d'une composante de translation, la même en tous les points par unité de masse, et d'une autre force, composante de rotation, tendant à faire tourner le point autour d'un axe instantané conjugué, dans l'ellipsoïde central des n points, du plan du couple de percussion, cette force étant proportionnelle à la distance du point à l'axe et à la masse.

Ceci posé, on voit immédiatement que :

1° Les lignes d'action des pressions agissant sur des points situés sur une circonférence perpendiculaire à l'axe instantané appartiennent à un hyperboloïde à une nappe qui est de révolution lorsque cet axe se confond avec la résultante de translation du système de forces donné ;

2° La condition nécessaire pour que la pression exercée sur certains points soit nulle est que l'axe instantané et la résultante de translation soient rectangulaires; alors les points se trouvent alignés sur une droite parallèle à l'axe instantané et située dans un plan perpendiculaire à la résultante de translation et à une distance de l'axe, telle qu'on a

$$f_t = p\omega,$$

f_t étant la composante de translation, p la distance à l'axe et ω la vitesse angulaire.

3° Sur une droite donnée de l'espace, il ne peut y avoir plus d'un point pour lequel la pression soit parallèle à une direction donnée.

4° En supposant les points dans un plan, on retrouve toutes les théories connues du noyau central et des lois de répartition des pressions données dans tous les cours de Résistance des matériaux; nous n'insistons donc pas davantage là-dessus.

10. *Où l'on expose des vues nouvelles à propos du solide invariable.* — On donne, en Mécanique rationnelle, le nom de *solide invariable* à un ensemble de points matériels dont les distances sont invariables; c'est là une conception géométrique simple, mais est-ce bien celle qui résulte des considérations primitives qui l'ont fait éclore? Évidemment non.

Quand on a commencé à étudier l'action des forces sur les solides, on a remarqué que celles-ci produisaient deux genres d'action : une déformation passagère ou permanente et un mouvement, on a eu alors l'idée de simplifier les recherches en étudiant ce qui se passerait s'il n'y avait pas de déformation, c'est-à-dire si la rigidité du solide naturel devenait infinie. Le solide invariable s'est donc introduit comme limite de solides fictifs de moins en moins déformables, et c'est pour avoir perdu de vue ce point de départ qu'on est arrivé à dire, par exemple, que la répartition des pressions sur un certain nombre d'appuis est un problème indéterminé. Si l'on considère les appuis comme des corps géométriques, le problème ne peut évidemment avoir de solution déterminée et du reste, dans ce cas, il semble absolument inutile de le poser, car une pression étant une force, c'est-à-dire une cause de mouvement, si, *a priori,* on suppose qu'aucun mouvement ne peut se produire, à quoi bon chercher la cause d'un phénomène qui ne peut se réaliser ?

Au contraire, du moment qu'on évalue, ainsi que le recommande Lagrange, les forces soit par le mouvement qu'elles communiquent à un point matériel, soit par celui qu'elles lui communiqueraient s'il pouvait se mouvoir, et que l'on considère les solides comme des corps déformables, tout se simplifie et la question, renfermant les données rationnelles qu'elle doit fournir, a une solution unique et déterminée.

Les formules et les résultats que nous avons obtenus fournissent cette solution. Mais on peut se demander quelle est la série des solides naturels dont le solide invariable doit être la limite, pour que l'on retrouve les résultats que fournit la statique rationnelle et ses six équations d'équilibre qui ne tiennent compte que des relations géométriques de position et des valeurs des forces. La réponse semble intuitive, car, si l'on suppose que les propriétés élastiques sont les mêmes en tous les points, elles ne produiront aucune différence dans l'action des forces; nous allons le montrer dans un cas simple, celui de la décomposition d'une force donnée en deux autres parallèles passant par deux points donnés.

Si l'on appelle μ_a et μ_b les masses positives qui caractérisent les propriétés élastiques des corps auxquels appartiennent les points A et B, et λ la distance du point d'application M de la force P au centre de gravité des points μ_a et μ_b, enfin l la distance AB, on trouve, en appliquant à ce cas particulier les formules (20),

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\xi_a = 0, \qquad \eta_a = 0; \qquad \xi_b = 0, \qquad \eta_b = 0,\\
&\zeta_a = \mu_a \frac{P}{\mu_a + \mu_b} - \mu_a . AG \frac{P\lambda}{\mu_a . \overline{AG}^2 + \mu_b . \overline{BG}^2},\\
&\zeta_b = \mu_b \frac{P}{\mu_a + \mu_b} + \mu_b . BG \frac{P\lambda}{\mu_a . \overline{AG}^2 + \mu_b . \overline{BG}^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on compare les valeurs (23) aux suivantes, que donnent les équations d'équilibre,

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\zeta'_a = P \frac{MB}{AB} - \frac{P}{l}\left(\frac{l}{2} - \lambda\right),\\
&\zeta'_b = P \frac{MA}{AB} + \frac{P}{l}\left(\frac{l}{2} - \lambda\right),
\end{aligned}
\right.
$$

on voit que, quelles que soient les valeurs de μ_a et μ_b, les valeurs seront différentes des secondes tant que l'on n'aura pas

$$\mu_a = \mu_b.$$

Il semble donc qu'on peut énoncer ce principe que : La considération d'un solide invariable limite d'un corps naturel dont la rigidité augmenterait indéfiniment tandis qu'en chacun de ses points les propriétés élastiques restent les mêmes dans toutes les directions donne la valeur des pressions en chaque point, ou en d'autres termes :

Les pressions qu'un solide invariable exerce sur ses points d'appui sont, dans le cas où les propriétés élastiques des appuis sont les mêmes, égales aux forces motrices initiales qui mettraient en mouvement chacun de ces points, si leur ensemble était entraîné, à partir du repos, par le système de forces donné et à la façon d'un solide invariable.

Nous limitons ce résumé à ce qui a trait à la partie absolument théorique, qui seule peut trouver place ici ; mais nous devons faire remarquer que la théorie que nous venons d'exposer nous a permis de montrer que l'indétermination n'existe dans aucune des questions de la pratique, par exemple dans celle qui a trait à la détermination du point d'application de la poussée dans les voûtes, dont la solution est immédiate.