Nouvelles annales de mathématiques

J. Réveille

Sur un mode de génération des courbes anallagmatiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 180-182

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__180_1>

SUR UN MODE DE GÉNÉRATION DES COURBES ANALLAGMATIQUES;

PAR M. J. REVEILLE.

M. Moutard a démontré qu'une courbe anallagmatique du quatrième degré est l'enveloppe d'un cercle variable orthogonal à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique.

Je vais démontrer et généraliser ce mode de génération par la considération purement géométrique d'une figure de l'espace.

J'énoncerai d'abord la propriété suivante, qui est la conséquence immédiate d'un théorème plus général, démontré par M. Mannheim.

Toute courbe anallagmatique est la projection stéréographique de l'intersection d'une sphère et d'un cône.

(Cette projection stéréographique se fait, comme d'ailleurs dans tout ce qui suit, au moyen de la sphère elle-même.)

Soit A la courbe d'intersection de la sphère et du cône (S), et A′ sa projection stéréographique. Les plans tangents au cône déterminent sur la sphère des cercles (O) qui touchent A aux points où les génératrices de contact percent la sphère, et la courbe A est l'enveloppe de ces cercles.

Le sommet C du cône circonscrit à la sphère suivant un cercle O se trouve dans le plan polaire (P) du sommet du cône (S) par rapport à la sphère. Ce plan coupe la sphère suivant un cercle T qui est la courbe de contact du cône circonscrit à la sphère, dont le sommet coïncide avec celui du cône (S). On sait que ce cercle est orthogonal à tous les cercles O.

Le point C est, dans le plan (P), le pôle, par rapport au cercle T, de l'intersection de ce plan avec le plan du cercle O; et, ce dernier plan étant tangent au cône (S), cette intersection est tangente à la courbe D suivant laquelle le plan (P) coupe le cône (S).

Le point C appartient donc à la polaire réciproque Δ de la courbe D, le cercle T étant le cercle directeur.

En projection stéréographique la courbe A devient la courbe anallagmatique A′; les cercles O deviennent des cercles O′ enveloppant la courbe A′, et orthogonaux au cercle T′, projection de T. Les centres des cercles O′

sont les points C' projections des points C; ils sont sur la projection Δ' de Δ; et, comme les relations de pôle et de polaire se conservent en projection, les courbes D' et Δ' projections de D et Δ sont polaires réciproques, le cercle directeur étant le cercle T'.

Si le cône (S) est du degré n, la courbe A est du degré $2n$, et, en général, aussi la courbe A'; quant à D', elle est du degré n.

On peut alors énoncer :

Une courbe anallagmatique de degré $2n$ est l'enveloppe d'un cercle variable orthogonal à un cercle fixe, et dont le centre décrit une courbe qui est la polaire réciproque d'une courbe de degré n, le cercle fixe étant le cercle directeur.

Si le cône (S) passe par le point de vue, la courbe A' est du degré $2n - 1$, la courbe D' passe alors par la projection du sommet du cône (S), c'est-à-dire par le centre T'; et l'on peut compléter l'énoncé précédent en ajoutant que, si la courbe de degré n passe par le centre du cercle fixe, l'enveloppe est une anallagmatique du degré $2n - 1$.

Si l'on fait $n = 2$, on a les anallagmatiques du troisième et du quatrième degré.

Remarquons enfin que le centre du cercle T' est la projection du sommet du cône (S). Si pour la courbe A on peut faire passer plusieurs cônes de degré n, on aura autant de cercles tels que T', c'est-à-dire autant de manières d'engendrer la courbe A'.

En particulier, si le cône est du deuxième degré, il existe en général trois autres cônes du deuxième degré passant par A; donc en tout quatre manières d'engendrer la courbe A'.