NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Application du calcul des résidus

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 142-148

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__142_0>

APPLICATION DU CALCUL DES RÉSIDUS;

PAR M. E. AMIGUES

1. Je me propose, dans cette Note, d'étendre aux variables imaginaires une formule donnée par M. Weierstrass pour les variables réelles, et de montrer qu'avec cette formule plus générale on peut trouver les coordonnées de certains centres de gravité au moyen du calcul des résidus.

Supposons que le point qui représente une variable z décrive une courbe C. Le point qui représente la fonction

$$u = f(z)$$

décrira une courbe C' et celui qui représente la fonction

$$v = \varphi(z)$$

décrira une courbe C''.

On appellera naturellement *points correspondants* les trois points donnés par une même valeur de z, et *éléments correspondants* trois éléments limités à chaque bout par trois points correspondants.

A chaque élément de la courbe C' on applique un poids égal à l'élément correspondant de la courbe C'' et l'on se propose de trouver le centre de gravité d'un pareil système.

Soient x_0, y_0 les coordonnées de ce centre de gravité et soit μ une quantité ayant ce point comme affixe, de telle sorte que l'on ait

$$\mu = x_0 + y_0 i.$$

Posons

$$f(z) = P + Qi,$$

ce qui montre que P et Q sont les coordonnées du point de la courbe C′ qui correspond au point z de la courbe C. On a les deux équations suivantes

$$x_0 \int_C \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz] = \int_C \mathrm{P} \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz],$$

$$y_0 \int_C \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz] = \int_C \mathrm{Q} \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz];$$

multipliant la seconde équation par i et ajoutant

$$\text{(A)} \qquad \mu \int_C \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz] = \int_C f(z) \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz].$$

Supposons, en particulier, que la courbe C soit un segment de l'axe des x compris entre les abscisses a et b, a étant la plus petite. Supposons aussi que la courbe C″ soit appliquée sur Ox. Supposons enfin que la quantité $\varphi'(x)$ reste positive quand x varie de a à b. Dans ces conditions

$$\operatorname{mod} dz = dx, \qquad \operatorname{mod} \varphi'(z) = \varphi'(x)$$

et la formule (A) devient la formule

$$\text{(B)} \qquad \mu \int_a^b \varphi'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

C'est la formule de M. Weierstrass, dont on trouvera une démonstration directe dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite.

2. Nous allons mettre la formule (A) sous une autre forme, en supposant que la courbe C et la courbe C″ soient connues, la courbe C′ demeurant arbitraire. La courbe C étant connue, la quantité

$$z = x + y\,i$$

est une fonction connue de t. On a donc, d'une part,

$$\operatorname{mod} dz = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \lambda(t)\,dt.$$

d'autre part

$$dz = dx + i\,dy = \rho(t)\,dt.$$

On en conclut

$$\frac{\operatorname{mod} dz}{dz} = \frac{\lambda(t)}{\rho(t)};$$

éliminant t entre cette équation et celle qui donne z en fonction de t, on a

$$(1) \qquad \frac{\operatorname{mod} dz}{dz} = F(z).$$

D'un autre côté, la courbe C'' est connue, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(z)$ est donnée; il en est de même de $\varphi'(z)$. Alors z est une fonction connue de t, $\varphi'(z)$ est aussi une fonction connue de t et le module de $\varphi'(z)$ également. On a donc

$$\operatorname{mod} \varphi'(z) = \tau(t).$$

Éliminant t entre cette équation et celle qui donne z en fonction de t, on obtient

$$\operatorname{mod} \varphi'(z) = \psi(z).$$

La formule (A) peut alors s'écrire

$$(C) \qquad \mu \int_C \psi(z)\,F(z)\,dz = \int_C f(z)\,\psi(z)\,F(z)\,dz$$

On voit que μ est le quotient de deux intégrales; et, si la courbe C est fermée, le quotient de deux résidus.

3. Supposons, en particulier, que l'on ait

$$\varphi(z) = z,$$

c'est-à-dire que la courbe C'' soit confondue avec la courbe C et que les points correspondants de ces deux courbes soient confondus. Supposons en outre que la variable z décrive un cercle ayant pour rayon R et pour centre l'affixe de la quantité a. On a alors

$$\operatorname{mod}\varphi'(z) = 1,$$

et, comme on a aussi

$$z - a = \mathrm{R}\, e^{ti},$$

on obtient

$$\operatorname{mod} dz = \frac{\mathrm{R}\, dz}{i(z-a)}.$$

La formule (A) devient alors, en intégrant le long de la circonférence entière et dans le sens direct,

$$2\pi \mathrm{R}\mu = \int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{R} f(z)\, dz}{i(z-a)}$$

ou bien

$$\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{f(z)\, dz}{z-a}.$$

De là le théorème suivant :

Si une variable z décrit un cercle de rayon R *et de centre a, une fonction uniforme quelconque*

$$u = f(z)$$

décrit une courbe fermée; et si à chaque élément de la courbe décrite par la fonction u on applique un poids égal à l'élément correspondant du cercle, le centre de gravité du système est l'affixe du résidu intégral de la fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ par rapport au cercle.

En particulier, si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle, on a

$$\mu = f(a).$$

4. Supposons que la variable z décrive un polygone fermé dans le sens direct. Soit s la portion de périmètre qui sépare un point fixe pris sur ce périmètre et un point de coordonnées x et y mobile sur ce périmètre; cette

longueur s étant regardée comme positive dans le sens direct.

Soit dès lors AB un côté du polygone, le sens AB étant le sens direct et soit α l'angle trigonométrique de Ox avec AB. x et y étant les coordonnées d'un point de AB, on a, en grandeur et en signe, AB étant le sens positif du segment ds,

$$dx = ds\cos\alpha,$$
$$dy = ds\sin\alpha\,;$$

on en conclut

$$dz = dx + i\,dy = ds\,e^{\alpha i}.$$

Considérons maintenant une fonction uniforme quelconque

$$u = f(z)$$

Le point u décrit un polygone à côtés curvilignes. A chaque élément de ce polygone curviligne appliquons le poids de l'élément correspondant du polygone rectiligne et cherchons le centre de gravité.

Nous aurons pour le côté AB

$$\mu\int_{AB} e^{-\alpha i}\,dz = \int_{AB} e^{-\alpha i} f(z)\,dz$$

et, en simplifiant,

$$\mu\int_{AB} dz = \int_{AB} f(z)\,dz,$$

μ étant le centre de gravité de l'arc qui correspond à AB.

Écrivant les égalités analogues pour les autres côtés et ajoutant, on a

$$\mu\int_{AB} dz + \mu'\int_{BC} dz + \ldots = \int_{P} f(z)\,dz,$$

l'intégrale du second membre étant prise tout le long du polygone.

En appelant l, l', l'',... les longueurs des côtés AB, BC,... du polygone et α, α', α'',... les angles de Ox avec ces côtés, on peut écrire

$$\mu l e^{\alpha i} + \mu' l' e^{\alpha' i} + \mu'' l'' e^{\alpha'' i} + \ldots = \int_{\mathrm{P}} f(z)\, dz;$$

si le polygone est un parallélogramme, la formule devient

$$(\mathrm{D}) \qquad (\mu - \mu'')\, l e^{\alpha i} + (\mu' - \mu''')\, l' e^{\alpha' i} = \int_{\mathrm{P}} f(z) dz;$$

si la fonction $f(z)$ est doublement périodique et que l'on prenne le parallélogramme des périodes, on voit que chaque côté donne une courbe fermée, que deux côtés opposés donnent la même courbe tracée dans l'ordre inverse et ayant chaque fois le même centre de gravité, c'est-à-dire que l'on a $\mu'' = \mu$ et $\mu''' = \mu'$. Le premier membre de la formule (D) est alors nul, ce qui est conforme au principe signalé par M. Hermite.

5. Le cas le plus intéressant serait celui où l'on aurait

$$\varphi(z) = f(z).$$

La formule (A) deviendrait alors

$$\mu \int_{\mathrm{C}} \operatorname{mod}[f'(z)\, dz] = \int_{\mathrm{C}} f(z) \operatorname{mod}[f'(z)\, dz]$$

et donnerait le centre de gravité de la courbe C' *supposée homogène*. Mais dans ce cas on ne peut exprimer $\operatorname{mod} f'(z)$ en fonction de z que si l'on se donne $f'(z)$ et par suite $f(z)$. On ne peut donc avoir que des résultats particuliers et non des théorèmes généraux. Nous signalerons les deux exemples suivants.

La variable z décrit un arc de cercle de centre a et de rayon R. Trouver le centre de gravité de la courbe homogène décrite par la fonction

$$u = \mathrm{A}(z - a)^p + \mathrm{B}.$$

(Cette dernière courbe est aussi un arc de cercle et l'on arrivera facilement au résultat connu.)

Même question pour la fonction

$$u = \mathrm{A}e^{mz} + \mathrm{B}.$$