Nouvelles annales de mathématiques

V. Jamet

Sur les séries à termes positifs

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 99-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__99_1>

SUR LES SÉRIES A TERMES POSITIFS;

PAR M. V. JAMET.

(Extrait des *Comptes rendus*, t. CXIV, p. 57; 11 janvier 1892.)

1. Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ une série dont les termes, tous positifs, tendent vers zéro, quand leur rang est de plus en plus élevé. Je suppose qu'en même temps l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers l'unité, et je me propose de signaler un cas étendu où, dans ces conditions, la série est convergente. Mais d'abord j'observe que, si l'on pose

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \alpha_n,$$

le produit $n\alpha_n$ doit croître au delà de toute limite, bien que le facteur α_n soit infiniment petit. En effet, d'après l'égalité précédente,

$$u_n = (1 - \alpha_n)^n = \left[(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n\alpha_n}.$$

Mais $(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}$ a pour limite $\frac{1}{e}$. Si donc $n\alpha_n$ tendait vers une limite k, finie ou nulle, u_n tendrait vers une limite e^{-k}, différente de zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cette remarque me conduit à examiner le cas où il existe un nombre p, compris entre zéro et 1, tel que le produit $n^{1-p}\alpha_n$ tende vers une limite; je dis que *la série sera convergente chaque fois que cette limite ne sera pas nulle.* En effet, l'égalité précédente équivaut à celle-ci

$$u_n = \left\{\left[(1-\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n^{1-p}\alpha_n}\right\}^{n^p}.$$

Soit $\lim n^{1-p}\alpha_n = h$. L'expression que nous élevons à la puissance n^p tend vers $\frac{1}{e^h}$, et par conséquent devient, à partir d'une certaine valeur de n, inférieure à un nombre a, compris entre 1 et $\frac{1}{e^h}$. Dès ce moment, les termes de la série sont inférieurs à ceux de la série suivante

$$\text{(A)} \qquad a^{n^p},\ a^{(n+1)^p},\ \ldots,\ a^{(n+i)^p},\ \ldots,$$

dont on augmentera encore les termes en remplaçant p par l'inverse d'un nombre entier q, supérieur à $\frac{1}{p}$, et tout revient à démontrer que la série (A), modifiée de la sorte, est convergente. A cet effet, observons que, à partir d'un rang déterminé, nous pourrons grouper les termes de telle sorte que, dans le premier terme de chaque groupe, l'exposant de a soit un nombre entier. Les groupes successifs se présenteront alors comme il suit :

$$\begin{array}{lllll} a^k, & a^{\sqrt[q]{kq+1}}, & a^{\sqrt[q]{kq+2}}, & \ldots, & a^{\sqrt[q]{(k+1)q-1}}, \\ a^{k+1}, & a^{\sqrt[q]{(k+1)q+1}}, & \ldots, & \ldots, & a^{\sqrt[q]{(k+2)q-1}}, \\ \ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

et la somme des termes du groupe commençant par a^r sera inférieure à

$$[(r+1)^q - r^q]\,a^r.$$

Mais les séries

$$\sum_{r=k}^{r=\infty}(r+1)^q a^r, \qquad \sum_{r=k}^{r=\infty} r^q a^r$$

sont convergentes, puisque, dans chacune d'elles, le rapport d'un terme au précédent a pour limite a. Donc, il en est de même de la série (A), et aussi de la série donnée.

2. La démonstration précédente subsiste *alors même que* $n^{1-p}\alpha_n$ *tend vers l'infini positif*, pour une certaine valeur de p, positive et inférieure à 1, ou pour diverses valeurs de p comprises entre ces limites. C'est ce qui arrive, par exemple, si l'on a

$$\alpha_n = \frac{\log n}{n^k} = \frac{1}{k}\,\frac{\log n^k}{n^k},$$

k désignant un nombre compris entre zéro et 1. On voit d'abord que α_n tend vers zéro quand n croît indéfiniment, parce que la fonction $\frac{\log x}{x}$ tend vers zéro quand x croît au delà de toute limite. Mais, si l'on fait $p = 1 - k$, on trouve

$$n^{1-p}\alpha_n = \log n,$$

et l'on en conclut que la série

$$\sum^{n=\infty} \left(1 - \frac{\log n}{n^k}\right)^n \qquad (0 < k < 1)$$

est convergente. Si l'on avait $k \leqq 1$, la série serait divergente, comme nous allons le démontrer. Mais, tout d'abord, nous justifierons le choix de cet exemple en montrant que nous sommes bien dans un cas où il est impossible de trouver un nombre p, satisfaisant aux conditions énoncées. En effet, pour toute valeur positive de p,

$$n^{1-p}\alpha_n = \frac{\log n}{n^{k+p-1}} = \frac{1}{k+p-1}\,\frac{\log n^{k+p-1}}{n^{k+p-1}}.$$

Il est donc bien vrai que, dans l'exemple actuel, $n^{1-p}\alpha_n$ tend vers zéro pour toute valeur comprise entre zéro et 1.

Quant à la divergence de la série, il suffit de la démontrer dans l'hypothèse où $k = 1$, puisque son terme général augmente avec k; et la proposition sera établie si je fais voir que, dans cette hypothèse, nu_n a pour limite 1, ou que $\log n + \log u_n$ a pour limite zéro. Or

$$\begin{aligned}\log u_n &= n \log\left(1 - \frac{\log n}{n}\right)\\ &= -n\left[\frac{\log n}{n} + \frac{\log^2 n}{2n^2\left(1 - \theta\,\frac{\log n}{n}\right)^2}\right],\end{aligned}$$

θ désignant un nombre compris entre zéro et 1. Ceci résulte du développement de $\log(1 + x)$ par la formule de Maclaurin. Donc

$$\text{(B)} \qquad \log n + \log u_n = -\frac{\log^2 n}{2n\left(1 - \theta\,\frac{\log n}{n}\right)^2}.$$

Mais $\frac{\log^2 n}{n}$ a pour racine carrée

$$\frac{\log n}{\sqrt{n}} = 2\,\frac{\log\sqrt{n}}{\sqrt{n}},$$

et cette expression tend vers zéro, quand n croît au delà de toute limite. Donc, le second membre de l'égalité (B) tend vers zéro. C. Q. F. D.

3. Revenons maintenant à la série (A). Nous avons démontré qu'elle est convergente, quand a est inférieur à 1; si a est supérieur à 1, elle est manifestement divergente; et en procédant comme on le fait pour démontrer la règle de convergence due à Cauchy $(\sqrt[n]{u_n})$, on arrivera à la règle suivante :

La série à termes positifs

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

sera convergente, s'il existe un nombre positif p, *tel que l'expression* $u_n^{\frac{1}{n^p}}$ *tende vers une limite inférieure à* 1. *Elle sera divergente, s'il existe un nombre* p, *positif, tel que cette expression tende vers une limite supérieure à* 1, *quand* n *croît indéfiniment.*