NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FOURET

Sur le théorème de Budan et Fourier

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 82-88

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__82_1>

SUR LE THÉORÈME DE BUDAN ET FOURIER;

PAR M. G. FOURET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Le cours d'Algèbre supérieure de Serret contient une démonstration, déjà très simplifiée, du célèbre théorème découvert à la fois par Budan et par Fourier ([1]). On peut cependant, comme nous allons le faire voir, donner à cette démonstration une forme encore plus simple, qui nous semble offrir quelque intérêt, tant en raison du théorème lui-même que des conséquences auxquelles il conduit. On sait, en effet, que le théorème de Descartes s'en conclut immédiatement. On verra également plus loin comment on en fait découler très naturellement la règle de Newton, pour trouver une limite supérieure des racines d'une équation et une règle toute semblable, qui ne nous paraît pas connue, pour déterminer une limite inférieure de ces racines.

La valeur pédagogique, qu'acquiert ainsi le théorème de Budan et Fourier, nous engage à traiter ce sujet avec quelque développement.

2. THÉORÈME DE BUDAN ET FOURIER. — *Étant donnée une équation algébrique entière* $X = 0$, *à une seule inconnue* x, *le nombre des racines réelles de cette équation, comptées avec leur ordre de multiplicité,*

([1]) M. Ossian Bonnet en a donné, il y a plusieurs années, une démonstration toute différente, basée sur le théorème de Rolle (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. III, p. 119).

qui sont comprises entre α et $\beta > \alpha$, est égal, ou inférieur d'un nombre pair, au nombre des variations que perd la suite formée par X et ses dérivées successives, lorsqu'on y fait consécutivement $x = \alpha$ et $x = \beta$.

Les fonctions algébriques entières, qui composent la suite

$$(1) \qquad X, \quad X', \quad X'', \quad \ldots, \quad X^{(m)},$$

m désignant le degré de X, ne peuvent changer de signe qu'en s'annulant. Cette suite ne peut donc perdre, ou gagner de variations, que lorsque x passe par une valeur annulant une ou plusieurs des fonctions (1).

Soit a une racine, d'ordre de multiplicité p, de $X = 0$. On peut toujours trouver un nombre positif h, tel que les fonctions X, X', ..., $X^{(m-1)}$ ne s'annulent pas, lorsque x varie de $a - h$ à a et de a à $a + h$. Alors, en vertu d'un théorème bien connu sur la dérivée logarithmique, la suite

$$(2) \qquad X, \quad X', \quad \ldots, \quad X^{(p)}$$

présente p variations, pour les valeurs de x comprises entre $a - h$ et a et p permanences, pour les valeurs de x comprises entre a et $a + h$. Donc, *la suite (2) perd p variations, quand x passe, en croissant, par une racine, multiple d'ordre p, de $X = 0$.*

Soit maintenant b une racine, d'ordre de multiplicité q, de $X^{(n)} = 0$ [1]. D'après la remarque précédente, la suite

$$X^{(n)}, \quad X^{(n+1)}, \quad \ldots, \quad X^{(n+q)}$$

perd q variations, lorsque x passe, en croissant, par la valeur b. Par conséquent, lors même que l'intervalle

---

[1] Serret distingue deux cas, suivant que q est pair ou impair. Notre raisonnement rend cette distinction inutile.

de $X^{(n-1)}$ à $X^{(n)}$ acquerrait une variation, *la suite*

$$X^{(n-1)},\quad X^{(n)},\quad X^{(n+1)},\quad \ldots,\quad X^{(n+q)}$$

ne peut gagner aucune variation, quand x passe, en croissant, par une racine, multiple d'ordre q, de $X^{(n)} = 0$.

Cela posé, substituons α et $\beta > \alpha$ à x dans la suite (1), et désignons par ν_α et ν_β les nombres de variations résultant de ces substitutions. Il est clair que ν_α surpasse ν_β d'autant d'unités au moins, qu'il y a, entre α et β, de racines de $X = 0$, comptées avec leur ordre de multiplicité, puisque la suite (1) ne perd de variations que lorsque x passe en croissant par une racine de $X = 0$, et qu'elle en perd, dans ce cas, autant qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de la racine.

Pour compléter la démonstration du théorème, supposons, par exemple, que l'intervalle (α, β) comprenne un nombre impair de racines de $X = 0$, chacune d'elles étant comptée avec son ordre de multiplicité. En substituant successivement α et β à x dans X, on obtient des résultats de signes différents, et, comme $X^{(m)}$ est une constante, les nombres de variations ν_α et ν_β sont de parités différentes. Leur différence est donc impaire, de même que le nombre des racines comprises entre α et β.

Le raisonnement et la conclusion sont les mêmes, lorsqu'on suppose que l'intervalle (α, β) renferme un nombre pair de racines de $X = 0$.

3. *Remarques.* — 1° La démonstration précédente, en ce qui concerne $X^{(m)}$, s'appuie uniquement sur la constance du signe de cette dérivée. On en conclut que dans l'application du théorème de Budan et Fourier, on peut limiter la suite des dérivées à une dérivée qui, même en s'annulant, ne change pas de signe, pour les valeurs de x comprises entre les nombres α et β.

Cette remarque permet d'étendre le théoreme aux équations transcendantes, sous certaines conditions de continuité qu'il est superflu d'énoncer ici.

2° Il peut arriver que les nombres substitués, α et β, annulent une ou plusieurs fonctions intermédiaires de la suite (1). On doit, en pareil cas, dans l'application du théorème, compter le nombre des variations de cette suite, en faisant abstraction des zéros.

En effet, supposons d'abord que ce soit $\alpha < \beta$ qui annule les fonctions consécutives $X^{(n)}, X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+q-1)}$. Prenons ε positif et assez petit pour qu'aucun nombre compris entre α et $\alpha + \varepsilon$ n'annule quelqu'une des fonctions (1). La substitution de $\alpha + \varepsilon$ à x dans $X^{(n)}$, $X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+q-1)}$ ne donnant lieu qu'à des permanences, les variations de la suite (1), pour $x = \alpha + \varepsilon$, sont en même nombre que pour $x = \alpha$, abstraction faite des fonctions qui s'annulent. D'ailleurs, l'équation $X = 0$ n'a aucune racine entre α et $\alpha + \varepsilon$. On doit donc, pour appliquer le théorème de Budan et Fourier, compter les variations de la suite (1) pour $x = \alpha$, sans avoir égard aux fonctions qui deviennent nulles.

Supposons maintenant que ce soit β qui annule $X^{(n)}$, $X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+q-1)}$. Prenons η positif et assez petit pour qu'aucun nombre compris entre $\beta - \eta$ et β n'annule quelqu'une des fonctions (1). La substitution de $x = \beta - \eta$ dans la suite $X^{(n)}, X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+q-1)}$ n'y produit que des variations. Il est bien clair alors que le nombre des variations de la suite (1), pour $x = \beta$, ne peut être qu'au plus égal au nombre des variations résultant de la substitution de $x = \beta - \eta$. On est donc en droit, dans l'application du théorème de Budan et Fourier, de compter les variations qui correspondent à $x = \beta$, abstraction faite des fonctions qui s'annulent.

4. *Application du théorème de Budan et Fourier aux équations ayant toutes leurs racines réelles.* — Remarquons d'abord que la suite (1) présente toujours m variations, pour $x = -\infty$, et m permanences, pour $x = +\infty$. Donc, dans le cas où l'équation $X = 0$ a toutes ses racines réelles, le nombre de ces racines est justement égal à $\nu_{-\infty} - \nu_{+\infty}$. Il résulte de là que, dans cette hypothèse, le nombre des racines réelles comprises entre α et $\beta > \alpha$ ne peut être inférieur et, par conséquent, est égal au nombre $\nu_\alpha - \nu_\beta$; car, pour que le premier de ces nombres fût inférieur au second, il faudrait, par compensation, que $\nu_{-\infty} - \nu_\alpha$ fût inférieur au nombre des racines réelles comprises entre $-\infty$ et α, ou $\nu_\beta - \nu_{+\infty}$ inférieur au nombre des racines réelles comprises entre β et $+\infty$, ce qui serait contraire au théorème de Budan et Fourier. Donc, *quand une équation algebrique entière* $X = 0$ *a toutes ses racines réelles, le nombre de ces racines, comprises entre deux limites* α *et* β, *est égal à la différence des nombres de variations que présente la suite formée par* X *et ses dérivées successives, quand on y substitue consécutivement* α *et* β.

5. *Théorème de Descartes.* — Le nombre des variations de la suite (1), pour $x = 0$, est égal au nombre des variations du polynôme

$$X = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} - \ldots - a_{m-2} x^2 - a_{m-1} x + a_m,$$

supposé ordonné; car les fonctions, qui composent la suite, prennent alors respectivement les valeurs a_m, a_{m-1}, $1.2.a_{m-2}$, ... $1.2 \ldots m.a_0$. D'ailleurs, la suite (1) ne présente aucune variation pour $x = +\infty$. Donc, d'après le théorème de Budan et Fourier :

1° *Le nombre des racines positives d'une équation algébrique entière* $X = 0$ *est au plus égal au nombre* *des variations du polynôme* X *ordonné, et la différence, s'il y en a une, est un nombre pair.*

2° *Le nombre des racines positives d'une équation algébrique entière* $X = 0$, *qui a toutes ses racines réelles, est égal au nombre des variations du polynôme* X *ordonné.*

6. *Limite supérieure des racines d'une équation. — Règle de Newton.* — Soit l un nombre qui, substitué à x dans la suite (1), n'y produit que des permanences. Comme il en est de même pour la substitution de $x = +\infty$, on peut affirmer, d'après le théorème de Budan et Fourier, que l'équation $X = 0$ n'a pas de racine réelle comprise entre l et $+\infty$. Donc, *tout nombre qui, substitué à* x *dans le polynôme entier* X *et dans ses dérivées successives, donne des résultats de même signe, est une limite supérieure des racines de l'équation* $X = 0$.

7. *Limite inférieure des racines d'une équation.* — Soit k un nombre positif ou négatif, qui, substitué à x dans la suite (1), y donne des résultats alternativement positifs et négatifs. Comme il en est de même pour la substitution de $x = -\infty$, on est en droit d'en conclure, d'après le théorème de Budan et Fourier, que l'équation $X = 0$ n'a pas de racine réelle comprise entre $-\infty$ et k. Donc, *tout nombre qui, substitué à* x *dans le polynôme entier* X *et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de l'équation* $X = 0$.

8. Il serait sans doute téméraire d'affirmer que cette règle si simple, pour trouver une limite inférieure des racines d'une équation, est nouvelle; et cependant, si

elle est déjà connue, comment se fait-il qu'on ne la trouve dans aucun des ouvrages classiques qui traitent de la résolution des équations? Elle présente en effet, comme il est facile de le voir, les mêmes facilités d'application et les mêmes avantages que la règle de Newton donnant une limite supérieure des racines. Elle jouit notamment de ces deux propriétés : 1° de fournir une limite inférieure, plus approchée de la plus petite racine que toutes celles données par les autres méthodes connues; 2° de permettre, dans le cas d'une équation ayant toutes ses racines réelles, de déterminer un nombre aussi peu inférieur que l'on veut à la plus petite racine.

Rien n'est plus aisé d'ailleurs que d'établir directement la règle en question de la manière suivante.

9. Soit k un nombre qui, substitué dans le polynôme entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs. Nous allons montrer que $F(x)$ ne peut s'annuler pour aucun nombre plus petit $k-h$ ($h>0$). On a, en effet,

$$F(k-h) = F(k) - hF'(k) + \frac{h^2}{1.2} F''(k) - \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{h^p}{1.2\ldots p} F^p(k) + \ldots + (-1)^m \frac{h^m}{1.2\ldots m} F^m(k).$$

D'une manière générale, $F^p(k)$ est du signe de $F(k)$ ou d'un signe contraire, suivant que p est pair ou impair, et le terme $\frac{h^p}{1.2\ldots p} F^p(k)$ est précédé, dans le développement précédent, du signe $+$ dans le premier cas, du signe $-$ dans le second. Donc $F(k-h)$, étant une somme de termes tous de même signe, ne peut être nul.