MALO

Autre solution géométrique de la même question

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 61-70
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__61_0>

AUTRE SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÊME QUESTION;

PAR M. LE CAPITAINE MALO.

Sur une parallèle quelconque à la droite donnée (Δ), il y a quatre points du lieu N, N', n, n' correspondant par couples aux deux points M et m où cette parallèle à (Δ) rencontre la parabole. S'il y avait sur Mm un autre point du lieu qui résulterait de la construction appliquée, non point à Mm, mais à une autre parallèle à (Δ), ce ne pourrait être que le point infiniment éloigné dans cette direction : ainsi, sauf le cas où le lieu admettrait une asymptote parallèle à (Δ), ce qu'on verra plus loin être impossible, il est acquis premièrement que l'ordre du lieu est 4.

Une première série de quatre points N, N', n, n' étant obtenue, toutes les séries analogues peuvent y être rattachées par une construction simple. En effet, si M_1 est un second point de la parabole, il suffira de prendre le point T où la droite MM_1 rencontre la directrice (D) et de tirer les droites TN, TN' qui couperont la parallèle à (Δ) menée par M_1 aux points cherchés N_1 et N'_1, correspondant à M_1, ... En effet, abaissant sur la directrice les perpendiculaires MP et M_1P_1, les segments MT, M_1T sont dans le même rapport que les droites MP, M_1P_1, et comme celles-ci sont dans le même rapport que MF, M_1F, partant que MN, M_1N_1, il est clair que les triangles MNT, M_1N_1T sont semblables et que N, N_1, T sont trois points en ligne droite. Cette construction montre comment l'on obtiendra la tangente en chaque point N du lieu, par la jonction de N avec le point où la directrice est coupée par la tangente à la parabole au point correspondant M.

J'examine maintenant la position de quelques points intéressants du lieu.

Je suppose d'abord que les points M et m coïncident; il en est alors de même des deux couples NN' et nn', et ici N s'est réuni à n, N' à n'. Cette circonstance se présentera deux fois, l'une quand la droite Mm sera tangente à la parabole (en μ), l'autre quand Mm se sera éloignée indéfiniment. Dans le premier cas, les points N et n, N' et n' étant devenus coïncidents, en $\mathfrak{N}$ et ν, de réels et distincts qu'ils étaient immédiatement auparavant et allant devenir imaginaires pour un nouveau déplacement infiniment petit de Mm, il est clair que Mm est une tangente double à la courbe. Si l'on objectait que les points $\mathfrak{N}$ et ν pourraient être des points de rebroussement, il suffit de se reporter à la construction de la tangente donnée ci-dessus, pour voir que celles en $\mathfrak{N}$ et ν coïncident avec $\mathfrak{N}\nu$. Quant à prétendre qu'il peut s'agir de deux points de rebroussement de deuxième espèce avec la même droite $\mathfrak{N}\nu$ pour tangente de rebroussement en chacun d'eux, l'impossibilité d'une pareille assertion est telle qu'il est absolument inutile de s'y arrêter. Le deuxième cas est identique au premier et le lieu admet la droite à l'infini comme bitangente : il y a seulement matière à trouver les directions des points de contact. Pour cela, il suffit encore de se servir de la construction donnée d'autre part, en partant, par exemple, des points $\mathfrak{N}$ et ν, qu'il y a réel avantage à choisir comme points initiaux. Alors, M étant passé à l'infini, T vient en Θ, projection de μ sur la directrice et les directions cherchées sont $\Theta\mathfrak{N}$, $\Theta\nu$, rectangulaires entre elles, car $\Theta\mu = \mu\mathfrak{N} = \mu\nu = \mu F$; Θ et F sont, du reste, symétriques par rapport à $\overline{\mathfrak{N}\mu\nu}$.

Le point n peut coïncider non plus comme précédemment avec N (ce qui entraîne la coïncidence simultanée de n' avec N′), mais avec N′, N et n' restant distincts. Cela arrive manifestement lorsque la corde parallèle à (Δ) passe par le foyer F. Soient alors désignées par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{m}$ ces positions particulières des points M et m. Pour obtenir les tangentes en F, il faut, comme on a vu, prendre les points où celles en $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{m}$ coupent la directrice et les joindre à F; mais ici, en raison des propriétés connues des cordes focales, ces points coïncident en Θ : les deux tangentes en F sont donc coïncidentes avec la droite FΘ perpendiculaire à (Δ). Cette fois encore on n'a point cependant affaire à un rebroussement, car lorsque la corde de direction fixe traverse le foyer F, les points N′ et n, réels avant ce passage en F, sont encore réels après. On est en présence de cette singularité particulière résultant du contact de deux branches de courbe, équivalente à deux points doubles (et à deux tangentes doubles), qu'on a nommée *point tacnodal*.

Je passe maintenant à un dernier genre de coïncidence entre deux des quatre points d'une même série N, N′, n et n' : c'est celle qui a lieu entre deux points d'un même couple N et N′. Alors les distances MN et MN′ sont de module nul, ce qui entraîne qu'il en soit de même des distances MF et MP, et ainsi l'on voit que le cas en question est celui où le point M est l'un ou l'autre des points communs à la parabole donnée et à sa directrice. Ici une certaine attention est nécessaire pour ne pas se méprendre sur la nature des points envisagés : on aura établi que ce sont des points doubles, si l'on montre qu'il existe plus d'une sécante passant par ces points et y ayant deux intersections avec le lieu confondues. Or une sécante remplissant cette condition est par définition la droite de direction (Δ); mais il en est de même pour la droite isotrope qui passe par ce point et qui admet comme point réel le foyer F de la parabole, à cause de $\text{mod}\,MN = \text{mod}\,MN' = \text{mod}\,MF =$ zéro.

Cette circonstance est importante, car ces deux points doubles, joints au point tacnodal précédemment reconnu et qui en vaut deux autres, donnent un total de quatre points doubles, limite qu'une quartique ne peut atteindre sans se décomposer en deux coniques, et comme on a vu que la droite de l'infini était une bitangente, il s'agit ici de deux paraboles à axes rectangulaires et se touchant en un point F.

Cela étant, les droites $\Theta\mathcal{M}$ et $\Theta\nu$ sont pour chacune de ces paraboles les diamètres conjugués à la direction (Δ) : elles passent donc par les points $\mathcal{M}$ et $\mathfrak{m}$ de la parabole donnée, qui sont les extrémités de la corde focale de direction (Δ). Cette remarque est, du reste, de peu de conséquence, mais non pas la suivante. Les droites rectangulaires ΘF, $\mathcal{M}\nu$ étant tangentes aux paraboles trouvées en F et $\mathcal{M}$ d'une part, en F et ν de l'autre, leur point de rencontre I appartient aux directrices de ces paraboles, dont les foyers sont les projections Φ et φ de I sur les cordes de contact $F\mathcal{M}$, $F\nu$. [On voit en passant que, lorsque (Δ) varie, l'enveloppe des directrices est une parabole homothétique à la proposée avec F comme centre et $\frac{1}{2}$ comme rapport d'homothétie]. Qu'on abaisse maintenant IS perpendiculaire sur FD, S est le sommet de la parabole donnée, et, par construction, les points S, Φ, φ appartiennent à un même cercle décrit sur le diamètre IF. Donc l'angle $S\Phi F$ est égal à l'angle SIF, c'est-à-dire à l'angle $D\Theta F$. Mais, dans le cercle $\Theta\mathcal{M}F\nu$, de centre μ, cet angle formé par une sécante $F\Theta$ et par la tangente en Θ est égal à l'angle inscrit $\Theta\mathcal{M}F$. Les droites $\Theta\mathcal{M}$, $S\Phi$ sont donc parallèles, et, par suite, la deuxième, qui joint le foyer de la parabole à son point à l'infini est l'axe : il passe, comme il avait été annoncé, par un point fixe, le sommet de la parabole donnée.

Le paramètre d'une parabole est égal à deux fois la distance du foyer à la directrice. Le paramètre d'une des paraboles trouvées est donc égal au double de la projection de $\overline{I\Phi}$ sur $S\Phi$, c'est-à-dire à

$$2\overline{I\Phi}\sin(I\Phi, \Theta\nu).$$

Or l'angle en question est égal à

$$\widehat{\Theta\mathcal{M}F} = \widehat{D\Theta F} = \widehat{I\mathcal{M}, DF} = \theta.$$

De même le paramètre de l'autre parabole est égal à

$$2\overline{I\varphi}\sin\theta,$$

et, par suite, la somme des carrés est

$$4\left(\overline{I\Phi}^2 + \overline{I\varphi}^2\right)\sin^2\theta.$$

Mais

$$\overline{I\Phi}^2 - \overline{I\varphi}^2 = \overline{IF}^2$$

et, par suite, quatre fois cette somme vaut $\overline{\Theta F}^2$ qui, multipliée par $\sin^2\theta$, donne $\overline{DF}^2$, quantité constante.

Je passe maintenant au lieu des sommets des deux paraboles trouvées quand la direction (Δ) varie. Il s'agit d'abord de voir comment on peut le plus directement en construire un point. L'examen attentif de la figure montre que, par exemple, ayant construit sur la base SF un triangle $SF\Phi$ dont l'angle en Φ soit double de l'angle en S, on mènera la bissectrice ΦO et l'on projettera d'abord le point F sur cette bissectrice, ensuite le point ainsi obtenu sur $S\Phi$ en Σ. Ou bien, ce qui revient au même, considérant un cercle passant par les points S et F, et le point milieu O de l'arc SF, on portera, à partir de F, l'arc $F\Phi$ égal à l'arc OF : joignant alors $S\Phi$ et y projetant O en Δ, le point cherché Σ est le milieu du segment $\Delta\Phi$. Il est bien clair, d'ailleurs, que l'on ne peut pas *substantiellement* distinguer l'une des deux paraboles trouvées de l'autre et que la même courbe géométrique (symétrique nécessairement par rapport à SF) sera le lieu de leurs sommets.

Par exemple, dans le dernier mode de construction indiqué, le point φ du cercle diamétralement opposé à Φ, étant joint à S, donne un point σ, milieu du segment $\varphi\delta$, δ étant la projection du point milieu du plus grand arc SF. Les points Φ et φ, Δ et δ, Σ et σ vont par couples naturels, suivant ce qui a été admis dans l'énoncé.

Cela étant, il faut reconnaître que l'équation polaire du lieu est la traduction immédiate de propriétés évidentes dans les figures, et que se refuser à écrire sous sa vraie forme et à interpréter cette équation, est surtout faire acte d'intransigeance géométrique.... En adoptant cependant exclusivement ce dernier point de vue, la courbe (Σ), lieu des sommets, se présente comme diamètre curviligne, par rapport au pôle S, des courbes (Φ), lieu des foyers, et (Δ), lieu des points centraux sur les directrices. Ces lieux n'étant point envisagés dans l'énoncé, leur introduction fait longueur, bien que leur étude soit en somme facile.

J'examine d'abord la courbe (Δ). Elle résulte (isolément) de la construction suivante. Étant donnée une droite SF et la perpendiculaire $\overline{OO'}$ au milieu ω de $\overline{SF}$, on considère un triangle isoscèle ayant pour sommet S et sa base sur $\overline{OO'}$: les pieds Δ et Δ' des hauteurs sont les points dont on cherche le lieu. Sur une droite issue de S, il y a donc *un seul* point variable du lieu, mais ce point vient deux fois en S suivant les droites à $45°$ sur SF, quand le triangle SOO' est rectangle : on a donc affaire à une cubique. Les points $\Delta\Delta'$ se réunissant en ω quand l'angle en S est nul, cette cubique forme une boucle $S\omega S$. Pour aller plus loin, je remarque que les points S, Δ, Δ' et H (point de concours des hauteurs) sont sur un cercle, et que les points S, K (projections de Δ, Δ' sur SF), H et ω, forment une division harmonique. Donc, sur une droite $\Delta K \Delta'$, les points du lieu s'obtiennent en coupant par un cercle ayant son centre sur SF et passant par les points S et H (conjugué de S par rapport au segment $K\omega$). H venant en F quand $\Delta\Delta'$ passe à l'infini, deux des points à l'infini de la courbe sont, par définition, les points cycliques; d'autre part, H étant à l'infini lorsque K est symétrique de ω par rapport à S, on a l'asymptote réelle de la courbe, que toutes ces propriétés identifient à la strophoïde droite.

J'étudie maintenant la courbe (Φ). Sur chaque droite issue de F il y a trois points du lieu, car à cette droite, faisant l'angle ΦFX, correspondent trois droites passant par S et faisant avec SF les angles

$$\tfrac{1}{3}\widehat{\Phi F X},\quad \tfrac{1}{3}\widehat{\Phi F X}+120^\circ,\quad \tfrac{1}{3}\widehat{\Phi F X}+240^\circ.$$

La courbe est donc aussi du troisième ordre, à moins, cependant, que F ne soit un point du lieu, et cela ne peut avoir lieu que si $F\Phi$ coïncide avec FX; mais alors deux des droites $S\Phi$ font avec SF les angles de 60° et 120°, et ce sont les tangentes en S qui est un point double; quant au point commun à la limite aux droites coïncidentes SF, FX, et qui paraît, à première vue, indéterminé, la construction des points de (Φ) par le moyen du cercle $SF\Phi\varphi$ montre que l'arc SF s'étant appliqué sur sa corde, Φ est venu au point X tel que l'on ait

$$FX = \tfrac{1}{2}SF.$$

La position correspondante au point φ est à l'infini. Du reste, d'une façon générale, le point φ étant projeté sur SF, la distance de cette projection au point S s'exprime par $\overline{S\varphi}.\sin\theta$, en désignant par θ l'angle $\widehat{FS\Phi}$; or, on a

$$\overline{S\varphi}^2 + \overline{S\Phi}^2 = \overline{\Phi\varphi}^2 = \frac{\overline{SF}^2}{\sin^2 2\theta}.$$

Donc

$$\lim(\overline{S\varphi}.\sin\theta) = \lim\sqrt{\frac{\overline{SF}^2.\sin^2\theta}{\sin^2 2\theta} - \overline{S\Phi}^2.\sin^2\theta},$$

et comme la limite de $\overline{S\Phi}.\sin\theta$ est évidemment nulle, la limite cherchée est la même que celle de

$$\overline{SF}\,\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta} = \tfrac{1}{2}\overline{SF}.$$

La courbe (Φ) a donc même asymptote réelle que la courbe (Δ). D'autre part, sur tout cercle passant par les points S et F, il y a seulement deux points variables du lieu : il y en a donc quatre autres fixes, parmi lesquels deux ont été reconnus en S; les deux derniers, puisqu'ils ne peuvent être en F, sont nécessairement les points cycliques. La courbe (Φ), comme la courbe (Δ), est une cubique circulaire.

Cela étant, pour trouver l'ordre de la courbe (Σ), il suffit de compter ses points à l'infini, lesquels repondent un par un à chacun des points à l'infini de (Φ) *ou* de (Δ); mais comme les points à l'infini de ces courbes coïncident, il y a seulement trois points Σ à l'infini. La courbe (Σ) étant ainsi une cubique et un seul point Σ existant sur chacune des droites telle que $S\varphi$, c'est que S est un point double : ces considérations exclusivement géométriques ne permettent pas de fixer commodément quelle est la direction des tangentes en S; on voit seulement qu'elle est intermédiaire entre 45° et 60°.

La véritable valeur est

$$\text{angle}\,(\text{tang} = \sqrt{2}).$$

Au lieu de supposer que le point Σ divise le segment $\overline{\Delta\Phi}$ en parties égales, on pourrait, sans avoir à modifier aucune conclusion essentielle, supposer qu'il partage le même segment dans un rapport donné. A la limite on trouverait une cubique composée de l'asymptote réelle commune et des droites isotropes issues de S. Par suite, en ayant égard à la position d'un seul couple particulier $\Delta\Phi$, on verrait que (Δ) est la courbe diamétrale de (Φ) et de son asymptote réelle par rapport au pôle.

Remarque. — Si, au lieu de s'en tenir *strictement* à l'énoncé tel qu'il a été proposé, on lui eût fait subir une très légère modification, la démonstration eût pu être assez notablement abrégée. Dans le premier cas, les couples de points N et N$'$, n et n' s'obtiennent en prenant d'abord les deux points M et m où une droite de direction donnée coupe une parabole, puis en cherchant les intersections de cette même droite avec les cercles ayant les points M et m pour centres et les distances de ces points au foyer de la parabole comme rayons : le problème est biquadratique, le lieu est *a priori* une quartique, et il est nécessaire de faire voir qu'il y a sur cette quartique un nombre surabondant de points doubles, pour établir du même coup qu'elle se décompose en deux coniques. Mais si, au lieu des distances des points M et m au foyer, on considère leurs distances à la directrice, le problème commence à changer de nature, car on n'est plus alors forcé de déterminer à la fois chaque couple NN$'$, mais on peut considérer séparément le point N, par exemple, comme l'un des sommets à la base d'un triangle isoscèle dont le sommet principal décrit une parabole et l'autre sommet à la base la directrice de cette parabole, les côtés conservant des directions constantes. Il est évident cette fois que le problème est simplement quadratique, et le lieu de N est, *a priori,* une conique; quant à établir qu'il s'agit effectivement d'une parabole, c'est ce qu'il est facile de faire de la même manière que ci-dessus en examinant la nature des points à l'infini.