Nouvelles annales de mathématiques

Marchand

Solution de la question de mathématiques proposée au concours général en 1892

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 509-518

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__509_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1892;

PAR M. MARCHAND,
Professeur au lycée de Versailles.

Une quadrique Q *est circonscrite à un ellipsoïde donné* E.

A *étant le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan* P *de la courbe de contact des deux surfaces :*

1° *Démontrer qu'en général il y a trois quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *homofocales avec* E *et telles que les plans polaires* P_1, P_2, P_3 *du point* A *par rapport aux surfaces* Q_1, Q_2, Q_3 *passent par le centre de* Q.

2° *Les plans* P_1, P_2, P_3 *sont les plans principaux de* Q; *et les coniques* C_1, C_2, C_3, *intersections des surfaces* $(P_1 Q_1)$; $(P_2 Q_2)$; $(P_3 Q_3)$, *sont les focales de cette quadrique.*

3° *Les projections orthogonales des coniques* C_1, C_2, C_3 *sur les plans principaux de* E *sont des coniques homofocales. En particulier, on projettera sur le plan principal contenant les axes majeur et moyen de l'ellipsoïde* E. *Chercher le lieu des foyers des coniques* *projetées, quand Q varie en restant circonscrite à E; le plan P de la courbe de contact ne change pas.*

I. Je m'appuierai sur les théorèmes de Chasles relatifs aux réseaux de quadriques.

Appelant S_1, S_2, S_3 trois quadriques données en coordonnées tangentielles, je considérerai l'équation

$$(1)\qquad \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 - \lambda_3 S_3 = 0,$$

dans laquelle λ_1, λ_2, λ_3 désignent trois paramètres arbitraires.

Théorème fondamental. — *Deux faisceaux d'un même réseau ont toujours une quadrique commune.*

Comme pour un faisceau de coniques, cela revient à dire que deux équations, telles que

$$(2)\qquad a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0,$$

déterminent toujours un système de valeurs uniques de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Le théorème n'a pas de cas d'exception.

Je prends comme bases du réseau l'ellipsoïde E, le cercle imaginaire par lequel passent toutes les sphères C et le point double AA.

Un premier faisceau tangentiel est donné par le point double AA et la conique P déterminée dans E par le plan polaire de A. Une des quadriques de ce faisceau est la quadrique Q de l'énoncé et l'on a ainsi une des propriétés sur lesquelles roulera toute la solution. Les quadriques E et Q entrent symétriquement dans la question proposée.

Prenant E et C comme bases d'un faisceau du réseau, on obtient toutes les quadriques homofocales à E et, par symétrie, on aura toutes les quadriques homofocales à Q.

Soit E' une quadrique homofocale à E. Le faisceau défini par E' et AA est le faisceau des quadriques circonscrites à E' le long de la courbe P' déterminée par le plan polaire de A par rapport à E'. Le faisceau des quadriques homofocales à Q doit admettre, d'après le théorème fondamental, une quadrique Q' circonscrite à E', la courbe de contact étant P'. La première et la deuxième partie de l'énoncé ne sont que des conséquences immédiates de cette proposition.

Pour toute quadrique E', homofocale à E, le plan polaire relatif à A est aussi plan polaire pour une quadrique Q' homofocale à Q. Or le plan polaire de A par rapport à une quadrique homofocale à Q, c'est-à-dire ayant même centre que Q, ne peut passer par le centre que si la quadrique se réduit à une courbe plane, auquel cas la courbe de contact se réduit à la courbe elle-même. Or, dans le faisceau Q' des homofocales à Q, il n'y a que trois coniques, les trois focales. Par symétrie, il y aura trois quadriques homofocales à Q dont le plan polaire par rapport à A passera par le centre de E et ces trois quadriques passeront par les trois focales de E.

La troisième partie ne présente aucune difficulté. On sait que les cônes de sommet A circonscrits à un faisceau de surfaces homofocales sont homofocaux; le théorème s'applique évidemment aux cylindres circonscrits parallèlement à une direction donnée. Les sections droites des cylindres circonscrits au faisceau des quadriques Q', homofocales à Q (dont fait partie C_1, C_2, C_3) suivant une direction quelconque, sont des coniques homofocales.

Si, conformément à l'énoncé, on projette sur un plan principal de E, on retombe sur le problème du concours général de 1889. En effet, on cherche le lieu des foyers des contours apparents des surfaces Q inscrites à E le long de la conique P. La conique P, étant située sur l'ellipsoïde E, rencontre la section principale en deux points m et n pour lesquels le plan tangent est vertical. Les points m et n appartiennent donc au contour apparent et alors on est ramené à chercher le lieu des foyers des coniques tangentes à une conique donnée (la section principale de E) en deux points donnés m et n. J'ai démontré (*Nouvelles Annales*, juillet 1889) que le lieu était une strophoïde, l'enveloppe des axes étant une parabole dont la strophoïde est podaire par rapport à un point de la directrice.

La question est donc résolue et il paraît facile de l'étendre de bien des manières. Je me bornerai à démontrer les mêmes résultats par le calcul.

II. Soient α, β, γ les coordonnées du point A,

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde E. La quadrique Q aura pour équation

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} - 1\right) - P^2 = 0, \\ P = \dfrac{\alpha x}{a} + \dfrac{\beta y}{b} + \dfrac{\gamma z}{c} - \delta. \end{cases}$$

Si A reste à distance finie, on fera $\delta = 1$; s'il s'éloigne à l'infini, on fera $\delta = 0$.

Je réduirai l'équation (1) par l'application des procédés les plus élémentaires.

Le centre x_1, y_1, z_1 de Q est déterminé par

$$\lambda\frac{x_1}{a} + \frac{\alpha}{a}P_1 = 0, \qquad \lambda\frac{y_1}{b} + \frac{\beta}{b}P_1 = 0, \qquad \lambda\frac{z_1}{c} + \frac{\gamma}{c}P_1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{\alpha} = \dfrac{y_1}{\beta} = \dfrac{z_1}{\gamma} = \dfrac{P_1}{\lambda} = \dfrac{\delta}{k}, \\ k = \dfrac{\alpha^2}{a} + \dfrac{\beta^2}{b} + \dfrac{\gamma^2}{c} - \lambda. \end{cases}$$

Écartant provisoirement le cas où $\delta = 0$ qui donne évidemment $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, on a ces valeurs simples

$$(2) \quad x_1 = \frac{\alpha}{k}, \quad y_1 = \frac{\beta}{k}, \quad z_2 = \frac{\gamma}{k}, \quad k = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} - \lambda.$$

Je forme maintenant l'équation en s. J'écris

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) - p^2 - s(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$p = \frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} + \frac{\gamma z}{c},$$

j'égale à zéro les dérivées partielles

$$x\left(\frac{\lambda}{a} - s\right) - p\frac{\alpha}{a} = 0,$$

$$y\left(\frac{\lambda}{b} - s\right) - p\frac{\beta}{b} = 0,$$

$$z\left(\frac{\lambda}{c} - s\right) - p\frac{\gamma}{c} = 0$$

et, substituant dans l'identité qui définit p, j'obtiens l'équation en s, sous la forme de Jacobi,

$$(3) \qquad 1 = \frac{\alpha^2}{a^2\left(\frac{\lambda}{a} - s\right)} + \frac{\beta^2}{b^2\left(\frac{\lambda}{b} - s\right)} + \frac{\gamma^2}{c^2\left(\frac{\lambda}{c} - s\right)},$$

et comme δ n'y entre pas, cette formule s'applique, que A soit à distance finie ou infinie.

Cette équation se transforme aisément. Multipliant par λ,

$$\lambda = \frac{\alpha^2(\lambda - as + as)}{a(\lambda - as)},$$

et comme

$$\frac{\alpha^2(\lambda - as + as)}{a(\lambda - as)} = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\alpha^2}{\frac{\lambda}{s} - a},$$

l'équation en s devient, en définitive,

$$\frac{\alpha^2}{a-\frac{\lambda}{s}}+\frac{\beta^2}{b-\frac{\lambda}{s}}+\frac{\gamma^2}{c-\frac{\lambda}{s}}-k=0 \tag{4}$$

Cette équation s'applique encore si A est à l'infini; si l'on fait à la fois $\delta=0$, $k=0$, ce qui correspond au cylindre, les valeurs du centre se présenteraient sous la forme $\frac{0}{0}$, mais, l'équation (1) ne contenant pas de termes du premier degré, le cylindre est rapporté à un de ses centres, de sorte que sa forme réduite est

$$s'x^2+s''y^2-\lambda=0, \qquad \lambda=\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c},$$

s' et s'' étant les racines de

$$\frac{\alpha^2}{a-\frac{\lambda}{s}}+\frac{\beta^2}{b-\frac{\lambda}{s}}+\frac{\gamma^2}{c-\frac{\lambda}{s}}=0.$$

Revenant au cas général où le centre est quelconque, les formules (2) permettent d'écrire, en posant $\frac{\lambda}{s}=\rho$,

$$\frac{\alpha x_1}{a-\rho}+\frac{\beta y_1}{b-\rho}+\frac{\gamma z_1}{c-\rho}-1=0. \tag{5}$$

Les racines de (5) sont évidemment les paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3 des trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 de l'énoncé. Les termes du second degré de l'équation (1) deviendront

$$\frac{\lambda}{\rho_1}x^2+\frac{\lambda}{\rho_2}y^2+\frac{\lambda}{\rho_3}z^2.$$

Dans le cas général où δ n'est pas nul, il reste à transporter l'origine au centre. Prenant les notations usuelles, on sait que le nouveau terme constant sera

$$\begin{aligned}
D_1 &= Cx_1+C'y_1+C''z_1+D\\
&= \frac{\alpha}{a}\frac{\alpha}{k}+\frac{\beta}{a}\frac{\beta}{k}+\frac{\gamma}{a}\frac{\gamma}{k}-\lambda-1\\
&= \frac{k+\lambda}{k}-\lambda-1=\frac{\lambda(1-k)}{k}.
\end{aligned}$$

La quadrique Q rapportée à ses axes a pour équation

$$(6)\qquad \frac{x^2}{\rho_1}+\frac{y^2}{\rho_2}+\frac{z^2}{\rho_3}+\frac{1-k}{k}=0,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant les racines de l'équation (5).

La première et la deuxième partie de l'énoncé résultent de ce calcul.

Il est clair, en effet, que si j'étais parti, non de E, mais d'une quadrique E' homofocale à E

$$(E')\qquad \frac{x^2}{a-\rho'}+\frac{y^2}{b-\rho'}+\frac{z^2}{c-\rho'}-1=0,$$

le calcul précédent me donnerait pour la quadrique Q circonscrite à E' le long de la courbe P' déterminée par le plan polaire de A

$$(Q')\qquad \frac{x^2}{\rho_1-\rho'}+\frac{y^2}{\rho_2-\rho'}+\frac{z^2}{\rho_3-\rho'}+\frac{1-k}{k}=0,$$

puisque dans l'équation (5) il faut remplacer a, b, c par $a-\rho'$, $b-\rho'$, $c-\rho'$ et que cela revient à diminuer toutes les racines de ρ'.

La symétrie des surfaces E et Q apparaît d'une manière très nette. On a les deux faisceaux

$$\frac{x^2}{a-\rho}+\frac{y^2}{b-\rho}+\frac{z^2}{c-\rho}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{\rho_1-\rho}+\frac{y^2}{\rho_2-\rho}+\frac{z^2}{\rho_3-\rho}+\frac{1-k}{k}=0.$$

Si l'on donne à ρ la même valeur, on a deux surfaces correspondantes circonscrites l'une à l'autre, de telle manière que A soit pôle du plan de contact. Aux trois surfaces Q_1, Q_2, Q_3 déterminées par les valeurs ρ_1, ρ_2, ρ_3 du paramètre, correspondent les trois focales C_1, C_2, C_3 de Q, qui sont alors les intersections de Q_1, Q_2, Q_3, par les plans polaires P_1, P_2, P_3 relatifs au point A.

J'arrive à la troisième partie. Les projections de C_1, C_2, C_3 sur un plan quelconque sont homofocales. Cela résulte de ce théorème bien connu, à démonstration géométrique évidente, que les cylindres circonscrits parallèlement à une direction donnée à des surfaces homofocales sont homofocaux. Une démonstration analytique est, d'ailleurs, contenue dans les calculs précédents. J'ai indiqué comment on formerait l'équation réduite du cylindre circonscrit à E de sommet $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, et il suffira de remplacer a, b, c par $a-\rho$, $b-\rho$, $c-\rho$ dans le résultat pour constater que les cylindres circonscrits aux surfaces homofocales à E sont homofocaux.

Pour obtenir le lieu du foyer de la projection sur le plan des xy, je remarque que les courbes que l'on projette ne sont autre chose que les sections des surfaces

$$\frac{x^2}{a-\rho}+\frac{y^2}{b-\rho}+\frac{z^2}{c-\rho}-1=0,$$

par leur plan polaire relatif à A

$$\frac{\alpha x}{a-\rho}+\frac{\beta y}{b-\rho}+\frac{\gamma z}{c-\rho}-1=0.$$

En coordonnées tangentielles, il s'agit de la section de

$$(a-\rho)u^2+(b-\rho)v^2+(c-\rho)w^2-p^2=0$$

par un plan de coordonnées

$$\frac{\alpha}{a-\rho},\quad \frac{\beta}{b-\rho},\quad \frac{\gamma}{c-\rho},\quad -1.$$

L'équation de la section plane qui est corrélative de celle du cône circonscrit en coordonnées ponctuelles s'écrit

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu[(a-\rho)u^2+(b-\rho)v^2+(c-\rho)w^2-p^2] \\ &\qquad -(u\alpha+v\beta+w\gamma+p)^2=0, \\ &\mu=\frac{\alpha^2}{a-\rho}+\frac{\beta^2}{b-\rho}+\frac{\gamma^2}{c-\rho}-1. \end{aligned}\right.$$

Le point à l'infini dans la direction Oz a pour équation

$$w = 0. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8), prises ensemble, définissent le cylindre vertical projetant la courbe. Si l'on fait $w = 0$ dans l'équation (7), elle représentera une courbe du plan des xy qui sera la projection cherchée. On est donc ramené à chercher le lieu des foyers de

$$\mu[(a-\rho)u^2 + (b-\rho)v^2 - p^2] - (u\alpha + v\beta + p)^2 = 0. \tag{9}$$

Si, entre cette équation et

$$ux + vy + p = 0,$$

j'élimine p, j'aurai l'équation aux directions angulaires des tangentes menées du point xy

$$\left\{\begin{aligned} &\mu[(a-\rho)u^2 + (b-\rho)v^2 - (ux + vy)^2] \\ &\qquad - [u(x-\alpha) - v(y-\beta)]^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Cette équation doit être vérifiée pour $u = 1$, $v = i$ et pour $u = 1$, $v = -i$ si xy est foyer. Cela revient à dire que, si l'on fait $u = 1$, $v = i$ dans l'équation (10), on n'aura plus qu'à égaler séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire et éliminer ρ entre ces deux équations.

On a d'abord

$$\mu[a - \rho - b + \rho - (x + yi)^2] - [x - \alpha + i(y - \beta)]^2 = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} -\mu(x^2 - y^2 - a + b) - (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 &= 0, \\ \mu xy + (x-\alpha)(y-\beta) &= 0. \end{aligned}$$

L'équation du lieu est

$$\left\{\begin{aligned} &(x^2 + y^2 - a + b)(x-\alpha)(y-\beta) \\ &\qquad - xy[(x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2] = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Les termes du quatrième degré disparaissent et, si l'on transporte l'origine au point double $\alpha\beta$, on a

$$[(x+\alpha)^2-(y-\beta)^2-a+b]xy$$
$$-(x+\alpha)(y-\beta)(x^2-y^2)=0.$$

Développant,

$$(\beta x-\alpha y)(x^2-y^2)+\alpha\beta(x^2+y^2)-2hxy=0,$$
$$h=-\alpha^2-\beta^2-a-b$$

On a une cubique circulaire ayant à l'origine un point double par lequel les deux tangentes sont rectangulaires.

Si l'on passe aux coordonnées polaires en posant

$$x=\rho\cos\omega,\qquad \alpha=r\cos\varphi,\qquad \alpha\beta=-m\sin\psi,$$
$$y=\rho\sin\omega,\qquad \beta=r\sin\varphi,\qquad h=m\cos\psi,$$

on obtient

$$\rho=\frac{m}{r}\,\frac{\sin(\psi-2\omega)}{\sin(\varphi-\omega)}.$$

Si l'on pose $\frac{m}{r}=a$ et que l'on fasse tourner l'axe polaire d'un angle facile à déterminer, on obtient l'équation connue de la strophoïde oblique

$$\rho=\frac{a\sin(\theta-2\omega)}{\sin(\theta-\omega)}.$$