NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Démonstration analytique du théorème de M. Rouché relatif à un système d'équations algébriques du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 47-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__47_1>

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DU THÉORÈME DE M. ROUCHÉ RELATIF A UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. E. AMIGUES.

Soit à résoudre m équations à n inconnues, et soit p l'ordre du déterminant principal. Le nombre des dédéterminants caractéristiques est $m-p$. S'il est nul, on ajoutera au système une équation à coefficients nuls, qui n'altérera pas les solutions du système.

Supposons que l'on place en haut les p équations qui fournissent le déterminant principal, et représentons par δ_{p+i} le déterminant caractéristique fourni par l'équation de rang $p+i$.

En ordonnant δ_{p+1} par rapport aux éléments de sa dernière colonne, savoir les termes indépendants g_1, $g_2, \ldots$, on obtient

$$\delta_{p+1} = G_1 g_1 + G_2 g_2 + \ldots + G_{p+1} g_{p+1}.$$

g_{p+1} n'étant pas nul, puisqu'il est le déterminant principal.

Multipliant les $p+1$ premières équations respectivement par $G_1, G_2, \ldots, G_{p+1}$, et ajoutant, on a une équation qui peut remplacer la $(p+1)^{\text{ième}}$ sans altérer les solutions du système (parce que $G_{p+1} \neq 0$).

Dans cette équation, le coefficient d'une inconnue quelconque est un déterminant d'ordre $p+1$ formé avec les éléments du rectangle et par conséquent est nul. On voit alors facilement que l'équation qui remplace la $(p+1)^{\text{ième}}$ est

$$\delta_{p+1} = 0.$$

De même, dans ce nouveau système, on a le droit de remplacer la $(p+2)^{\text{ième}}$ des équations proposées par

$$\delta_{p+2} = 0,$$

et ainsi de suite.

Donc : tout système du premier degré est équivalent à un second système formé en prenant les équations qui fournissent le déterminant principal et en égalant à o les déterminants caractéristiques qui correspondent à toutes les autres équations.

On déduit de là les conclusions suivantes :

1° Si les déterminants caractéristiques ne sont pas tous nuls, pas de solution.

2° S'ils sont tous nuls, le système se réduit aux p premières équations proposées, et l'on peut en tirer les p inconnues qui correspondent au déterminant principal, par la règle de Cramer, en fonction des autres inconnues, au nombre de $n-p$ qui demeurent arbitraires. Si aucun des déterminants d'ordre p fournis avec les éléments du rectangle n'est nul, le nombre de manières dont on peut appliquer la règle de Cramer est visiblement $C_m^p\, C_n^p$.