Nouvelles annales de mathématiques

Émile Lemoine

Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apollonius

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 453-474

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__453_1>

APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ÉVALUATION DE LA SIMPLICITÉ DES CONSTRUCTIONS A LA COMPARAISON DE QUELQUES SOLUTIONS DU PROBLEME D'APOLLONIUS;

PAR M. ÉMILE LEMOINE.

Dans le numéro de juin 1892, page 227 de ce journal, se trouve le commencement d'un très intéressant article de M. *Maurice Fouché,* sur le célèbre problème d'*Apollonius : Mener les cercles tangents à trois cercles donnés.* Je ne connais pas de question particulière de Géométrie élémentaire qui ait donné lieu à tant de travaux, à tant de diverses et ingénieuses solutions. Il n'y a pour ainsi dire pas d'années où quelque géomètre n'ait publié soit une solution nouvelle, soit des remarques nouvelles, soit quelque démonstration nouvelle au sujet du célèbre problème; et la mine n'est pas épuisée, comme nous le montre M. *Fouché.* Une monographie complète de la question serait très intéressante à bien des égards et je regrette de ne pouvoir l'entreprendre; mais la solution de M. *Fouché* étant, je crois, neuve comme construction et comme marche générale, je pense intéresser les lecteurs des *Nouvelles Annales*, tout en ne la comparant qu'aux célèbres solutions de *Viète*, de *Bobillier* et *Gergonne* et à une solution très élégante de M. *Mannheim*, au moyen de la méthode d'évaluation que j'ai appelée : *Mesure de la Simplicité et de l'Exactitude*, sous le titre général de : *Art des constructions géométriques*.

L'exposé de cette théorie tenant en quelques lignes, je vais la répéter ici.

Pour permettre de comprendre complètement le développement de la comparaison des solutions, je donnerai aussi, comme application de la théorie, le symbole de toutes les constructions de détail qui entreront dans la mise en œuvre des quatre solutions que je vais examiner.

Si l'on veut bien me suivre, on s'apercevra que cette méthode, si simple dans son principe, exige cependant beaucoup d'attention, d'habitude et même de sagacité pour être employée convenablement.

Théorie générale de la Simplicité et de l'Exactitude dans les constructions géométriques.

Avec une règle, l'on ne peut faire, au point de vue du tracé, que deux opérations :

1° Faire passer le bord de la règle par un point.
Opération : (R_1).

2° Tracer la ligne qui suit le bord de la règle.
Opération : (R_2).

Avec un compas :

1° Mettre une pointe en un point placé.
Opération : (C_1).

2° Mettre une pointe en un point indéterminé d'une ligne tracée.................... Opération : (C_2).

3° Tracer le cercle............. Opération : (C_3).

De sorte que toute construction géométrique, faite avec la règle et le compas, sera ainsi représentée théoriquement par le symbole :

$$\text{Op.} : (M_1R_1 + M_2R_2 + N_1C_1 + N_2C_2 + N_3C_3),$$

M_1, M_2, N_1, N_2, N_3 étant des nombres entiers.

Pour abréger le langage, je conviens que O(R) ou O(AB) signifiera : la circonférence dont le centre est O et le rayon R ou AB.

Op. signifie : *opération*.

J'appelle *coefficient de simplicité*, ou plus brièvement *Simplicité* de la construction, le nombre

$$M_1 + M_2 + N_1 + N_2 + N_3,$$

qui représente le nombre d'opérations élémentaires que cette construction a exigées.

J'appelle *coefficient d'exactitude* ou *Exactitude* le nombre $M_1 + N_1 + N_2$.

M_2, N_3 représentent respectivement le nombre de droites et de circonférences tracées [1].

---

[1] Expliquer ici quelle est l'idée qui a guidé notre choix dans les symboles, le but que poursuit cette représentation des constructions, quelle est la raison qui nous a fait assimiler les deux opérations suivantes : mettre la pointe d'un compas en un point placé, opération que nous appelons C_1 et l'opération *manuellement* différente de mettre la pointe du compas en un point donné B lorsque l'autre est maintenue en A, ce qui arrive pour prendre entre les branches du compas la longueur AB, ..., expliquer cela et bien d'autres questions qui pourraient venir à l'esprit du lecteur, nous entraînerait à des développements beaucoup trop longs et nous renvoyons à notre Mémoire donné à l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Oran, en 1888, et *surtout* celui que nous venons de présenter au Congrès de Pau (septembre 1892). Qu'il nous suffise de prouver l'utilité de notre méthode en en constatant un résultat : nous avons montré, par son aide, que toutes (à très peu près) les constructions fondamentales données séculairement dans les éléments de Géométrie étaient trop compliquées; même : *mener par un point*

Applications de la théorie relatives aux solutions comparées du problème d'Apollonius.

I. *Tracer une droite quelconque*.... Op. : (R_2).

II. *Tracer une droite passant par un point placé.* Op. : $(R_1 + R_2)$.

III. *Tracer une droite passant par deux points placés*.................... Op. : $(2R_1 + R_2)$.

IV. *Tracer un cercle de rayon et de centre quelconques*........................ Op. : (C_3).

V. *Tracer un cercle de rayon quelconque dont le centre est donné*.......... Op. : $(C_1 + C_3)$.

VI. *Prendre une longueur donnée* AB *entre les branches d'un compas.* Il faut mettre une pointe en A, une autre en B............. Op. : $(2C_1)$.

VII. *Tracer un cercle de centre et de rayon donnés.* Op. : $(3C_1 + C_3)$.

VIII. *Porter sur une ligne donnée, à partir d'un point placé de cette ligne, une longueur donnée*...................... Op. : $(3C_1 + C_3)$.

IX. *En un point donné* A *sur une droite* AB *mener une droite* AC *qui fasse avec* AB *l'angle* CAB *égal à un angle donné* XOY.

Je trace O(R), A(R)..... Op. : $(2C_1 + 2C_3)$; R est un rayon quelconque.

---

une parallèle à une droite, et nous en avons donné d'autres (Congrès de Pau), les unes un peu plus simples, d'autres de moitié plus simples.

Je prends sur O(R) la corde de l'angle XOY et je la reporte sur A(R), etc.. Op. : $(3C_1 + C_3)$;

Je trace AC............. Op. : $(2R_1 + R_2)$:

En tout : Op. : $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$.

Simplicité, 11; exactitude, 7; 1 droite et 3 cercles à tracer.

X. *Tracer un cercle passant par trois points* M, M′, M″.

Je trace trois cercles M(R), M′(R), M″(R), R étant suffisamment grand pour qu'ils se coupent deux à deux............ Op. : $(3C_1 + 3C_3)$.

Je trace deux de leurs intersections deux à deux; elles se coupent au centre K du cercle cherché................ Op. : $(4R_1 - 2R_2)$.

Je trace le cercle K(KM). Op. : $(2C_1 + C_3)$. C'est le cercle demandé.

Symbole : Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$.

Simplicité, 15; exactitude, 9; 2 droites, 4 cercles.

XI. *Mener une perpendiculaire au milieu d'une droite donnée.*

Je trace avec un rayon suffisant C(R), C′(R). Op. : $(2C_1 + 2C_3)$.

Je trace l'intersection de ces deux cercles. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

En tout : Op. : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

Simplicité, 7; exactitude, 4; 1 droite, 2 cercles.

XI *bis*. *D'un point* A *extérieur à une droite* T, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Je trace A(R), R étant assez grand, pour que A(R) coupe T............. Op. : $(C_1 + C_3)$.

A(R) coupe T en B et C.

Je trace B(R), C(R) qui se coupent en A', et je trace AA'. Op. : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

En tout : Op. : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Simplicité, 9; exactitude, 5; 1 droite, 3 cercles.

XII. *Par un point O'', mener une parallèle à une droite* OO'.

D'un point quelconque λ je décris un cercle $\lambda(\lambda O'')$ qui coupe OO' en O et en O'.

Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je prends OO''. . . . . Op. : $(2C_1)$.

et je trace $O'(OO'')$ qui coupe $\lambda(\lambda O'')$ (du même côté de OO' que O'') en A. . . Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace $O''A$ qui est la parallèle cherchée

Op. : $(2R_1 + R_2)$.

obtenue par le symbole

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Simplicité, 9; exactitude, 6; 1 droite et 2 cercles à tracer.

Remarquons que cette construction de la parallele menée par un point à une droite donnée est un peu plus simple que la construction classique indiquée, depuis *Euclide*, dans tous les Traités de Géométrie, car celle-ci a pour symbole

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3).$$

Simplicité, 11; exactitude, 7; 1 droite et 3 cercles à tracer.

Et, pour ce problème, ce n'est même pas la seule qui soit plus simple que la construction séculaire des Traités de Géométrie.

XIII *Tracer la tangente à un cercle donné* A *de centre* O *en un de ses points* M.

Je trace M(MO) qui coupe le cercle A en B.
Op. : $(2C_1 + C_3)$.

Je trace B(MO) qui coupe le cercle M(MO) en C.................... Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace C(MO) qui coupe le cercle B(MO) en D..................... Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace MD............ Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3).$$

Simplicité, 10; exactitude, 6; 1 droite, 3 cercles.

Cette solution est aussi un peu plus simple que les solutions classiques.

Nous supposons toujours, dans cet article, que, quand un cercle est donné, son centre est placé sans avoir à le déterminer préalablement.

XIV. *Mener d'un point* H *extérieur les deux tangentes à un cercle* O.

Je trace un diamètre quelconque MOμ.
Op. : $(R_1 + R_2)$.

Je prends OH et je décris M(OH), μ(OH) qui se coupent en E...... Op. : $(4C_1 + 2C_3)$.

Je prends EO et je décris H(EO) qui coupe la circonférence O aux points de contact cherchés A et A_1.................. Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Je trace HA, A_1H..... Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

$$\text{Op.} : (5R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 3C_3).$$

Simplicité, 12; exactitude, 12; 3 droites, 3 cercles.

Remarquons encore que cette construction est plus simple que les constructions classiques : il suffit d'en chercher les symboles pour le voir.

XV. *Placer les centres de similitude ω et ω' de deux circonférences.*

Soient A et B les centres des deux circonférences.

Je trace AB qui coupe la circonférence A en A' et A'', la circonférence B en B' et B'', A' et B' étant pris entre les centres A et B.

Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Sur la circonférence A je prends :
corde $A'\alpha' = A'\alpha'' = A'A$... Op. : $(2C_1 + C_3)$.

Sur la circonférence B je prends :
corde $B''\beta' = B''B$......... Op. : $(2C_1 + C_3)$.
α' et β' étant pris du même côté de AB.

Je trace $\alpha'\beta'$ qui me donne ω par son intersection avec AB............. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je trace $\alpha''\beta'$ qui me donne ω' par son intersection avec AB........... Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op.} : (4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 3C_3).$$

Simplicité, 15 ; exactitude, 10 ; 2 droites, 3 cercles.

Solution graphiquement beaucoup plus simple que les tracés classiques ; nous ne répéterons plus cette remarque qui s'applique à presque tous les tracés que nous donnons ici.

XVI. *Tracer les quatre axes de similitude des trois circonférences* O, O', O''.

Je trace OO', $O'O''$, OO''. Op. : $(6R_1 + 3R_2)$.
Par O'', je mène une parallèle à OO'.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

Je n'ai plus qu'à joindre les extrémités des rayons parallèles ainsi obtenus dans les trois circonférences O, O', O'' en traçant 4 droites qui

placent les 4 centres de similitude de O et de O″, de O′ et de O″........ Op. : $(8R_1 + 4R_2)$.
Ces 4 centres de similitude me permettent de tracer immédiatement les 4 axes de similitude
Op. : $(8R_1 + 4R_2)$,
qui se trouvent tracés par le symbole

$$\text{Op.} : (24R_1 + 12R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Simplicité, 42 ; exactitude, 28 ; 12 droites, 2 cercles.

XVII. *Placer le centre radical de trois circonférences données* A, B, C.

Je trace deux circonférences O et O′, qui rencontrent les trois circonférences données.
Op. : $(2C_3)$.
Par leur moyen j'ai les axes radicaux de B et A et de B et C en traçant 8 droites.
Op. : $(16R_1 + 8R_2)$.

$$\text{Op.} : (16R_1 + 8R_2 + 2C_3).$$

Simplicité, 26 ; exactitude, 16 ; 8 droites, 2 cercles.

XVIII. *Placer le pôle p d'une droite* T *par rapport à une circonférence* A *de centre* A.

Deux cas à examiner :

1° T coupe A en M et en N.

Je mène la tangente en M au cercle A.
Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.
Je trace N(NA) qui coupe en O le cercle M(MA) déjà tracé pour avoir la tangente en M.
Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace AO qui coupe la tangente en M au pôle cherché p . . . . Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op. : } (4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3).$$

Simplicité, 15; exactitude, 9; 2 droites, 4 cercles.

2° T ne coupe pas le cercle A.

Cette solution s'applique même si T coupe A, pourvu que la distance de A à T soit supérieure à la moitié du rayon de A.

De A j'abaisse sur T une perpendiculaire dont le pied est F et qui coupe A en K du même côté du centre A que F.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Je décris F(FA) qui coupe le cercle A en H.

Op. : $(2C_1 + C_3)$.

Je décris H(HA) qui coupe AF en p.

Op. : $(2C_1 + C_3)$.

p est le pôle cherché; car les deux triangles isoscèles semblables AFH, AHp ont le côté AH commun. Donc $\overline{AH}^2$ ou le carré du rayon de A égale $Ap \times AF$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 5C_3)$.

Simplicité, 15; exactitude, 9; 1 droite, 5 cercles.

Ces deux solutions constituent à elles deux une construction générale.

Problème d'Apollonius.

Solution de Viète.

Je ne donnerai pas le développement de l'énoncé de cette solution si connue, qui consiste à ramener le problème à celui de la circonférence tangente à deux circonférences et passant par un point, etc.

Soient A, B, C les centres des trois circonférences ayant pour rayons R_a, R_b, R_c, nous ferons l'hypothèse : $R_a > R_b > R_c$. L'hypothèse de l'égalité de deux ou des trois rayons amènerait des simplifications dans le symbole général de la construction, mais nous n'examinerons, dans les quatre solutions que nous comparons, que le cas général de l'inégalité des trois rayons, car nous ne faisons nullement ici une discussion *complète* des solutions.

Je trace AB qui coupe la circonférence A en a et a', la circonférence B en b et b'; a et b étant les points les plus rapprochés . . . . Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je prends R_c . . . . Op. : $(C_1 + C_2)$.

Je reporte R_c sur AB de part et d'autre de b' en β et β_1; β étant entre b' et B.

Je reporte R_c sur AB de part et d'autre de a' en α et α_1: α étant entre a' et A . . . . Op. : $(2C_1 + 2C_3)$.
j'appelle α_2 et β_2 les seconds points où $A(A\alpha)$ et $B(B\beta)$ coupent AB, points qui se trouvent placés quand on a tracé les quatre cercles qui suivent.

Je trace $A(A\alpha)$, $A(A\alpha_1)$, $B(B\beta)$, $B(B\beta_1)$.

Op. : $(6C_1 + 4C_3)$.

Je vais maintenant déterminer les centres des quatre circonférences tangentes à $A(A\alpha)$, $B(B\beta)$ et passant en C; pour cela, je place les centres de similitude directe et inverse ω et ω' de ces deux circonférences $A(A\alpha)$, $B(B\beta)$.

Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_3)$

en économisant le tracé de AB déjà sur l'épure.

Je trace $C\omega$. . . . . Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Parmi les quatre solutions des circonférences tangentes à $B(B\beta)$, $A(A\alpha)$ et passant en C, deux coupe iont ωC en un point C', les deux autres en un point C''.

Or on sait que l'on a

$$\omega\alpha_2 \times \omega\beta_2 = \omega C \times \omega C' \quad \text{et} \quad \omega\alpha \times \omega\beta = \omega C \times \omega C'';$$

donc, si je fais l'angle $\omega\alpha_2 C' = \omega C\beta_2$, je placerai C' par :
Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 3C_3)$,
car je n'ai pas besoin de tracer $C\beta_2$: il suffit de décrire les cercles $C(C\beta_2)$, $\alpha_2(C\beta_2)$ et de prendre sur $\alpha_2(C\beta_2)$ un arc égal à celui qui est compris sur $C(C\beta_2)$ entre β_2 et la droite $C\omega$, etc.

Je place de même C'' par :
Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 3C_3)$.

Je trace maintenant les deux circonférences passant par C et C' et touchant $B(B\beta)$ et les deux circonférences passant par C et C'' et touchant $B(B\beta)$.

Pour cela, je décris une circonférence quelconque passant par C et C', mais coupant $B(B\beta)$. Op. : $(3C_1 + 3C_3)$.

Je trace l'intersection de cette circonférence et de $B(B\beta)$ droite qui coupe CC' en γ.. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je mène de γ les deux tangentes à $B(B\beta)$, mais comme je n'ai besoin que de leurs points de contact P et P' je ne trace pas en réalité ces tangentes, et je n'ai pas à tracer non plus un diamètre quelconque de $B(B\beta)$, car je puis me servir d'un diamètre déjà tracé : j'ai donc les points de contact par : .... Op. : $(7C_1 + 3C_3)$.

Je trace la perpendiculaire au milieu de CC'.
Op. : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

Je trace BP, BP' qui coupent cette perpendiculaire aux points O_1, O_2.............. Op. : $(4R_1 + 2R_2)$, qui sont les centres des deux circonférences passant en C et C' et tangentes à $B(B\beta)$, circonférences que je n'ai pas besoin de tracer.

J'aurai les centres O_3, O_4 des deux circonférences tangentes à $B(B\beta)$ et passant par C et C'' par le symbole............ Op. : $(8R_1 + 4R_2 + 11C_1 + 7C_3)$, en opérant de même que pour avoir O_1 et O_2 et en remarquant que j'ai pu économiser un C_1 et un C_3, si j'ai tracé en même temps sans déranger les branches de mon compas la perpendiculaire au milieu de CC' et la perpendiculaire au milieu de CC''.

Il nous faut maintenant placer aussi les quatre centres O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 des quatre circonférences passant par C et tangentes à $A(A\alpha_1)$ et à $B(B\beta_1)$; je les aurai par le symbole Op. : $(24R_1 + 12R_2 + 39C_1 + 23C_3)$, comme on peut le voir en récapitulant ce que nous avons fait depuis que nous avons tracé les quatre circonférences $A(A\alpha)$, $A(A\alpha_1)$, $B(B\beta)$, $B(B\beta_1)$.

Les centres O_1, O_2, ..., O_4, O'_1, ..., O'_4 des huit circonférences cherchées sont donc placés; il nous reste à tracer les circonférences elles-mêmes.

Pour tracer celle dont le centre est O_1, je remarque que O_1B déjà tracée pour placer O_1 coupe en Q la circonférence donnée de centre B, et qu'en traçant $O_1(O_1Q)$...................... Op. : $(2C_1 + C_3)$, j'aurai la circonférence cherchée.

Les sept autres seront de même données par

Op. : $(14C_1 + 7C_3)$

La construction totale que nous venons de faire se résume par le symbole

$$\text{Op.} : (52R_1 + 26R_2 + 101C_1 + C_2 + 59C_3).$$

Remarquons que, dans la construction, j'ai dit que je traçais $A(A\alpha)$ et $A(A\alpha_1)$; je l'ai fait pour ne pas trop interrompre l'exposé de la construction, mais ces circonférences ne servent pas, je n'utilise que les points α et α_1 situés sur AB et préalablement marqués; je ne dois donc pas tracer ces circonférences et j'économise ainsi .... Op. : $(4C_1 + 2C_3)$; d'un autre côté, comme α_2 se trouvait placé par le tracé de $A(A\alpha)$ je dois le placer. J'aurai de même à placer le point a'_2, autre extrémité du diamètre de $A(A\alpha_1)$, car j'aurai besoin de a'_2 pour placer O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 comme j'ai eu besoin de α_2 pour placer O_1, O_2, O_3, O_4. Je place ces deux points par............... Op. : $(C_1 + C_3)$. Cette modification n'économise donc en réalité que

$$\text{Op. : } (3C_1 + C_3).$$

De sorte que la construction de *Viète* (faite aussi économiquement que j'ai pu le faire par une recherche systématique, ce qui ne veut pas dire qu'aucune simplification possible ne m'a échappé) est représentée par le symbole

$$\text{Op. : } (52R_1 + 26R_2 + 98C_1 + C_2 + 58C_3).$$

Simplicité, 234; exactitude, 151; 26 droites, 58 cercles.

Solution de Gergonne et de Bobillier.

Soient A, B, C les trois circonférences données dont j'appelle les centres A, B, C.

Règle générale de la solution.

Je trace les quatre axes de similitude T, T_a, T_b, T_c.

Je place le centre radical ω des trois circonférences données.

Je place les pôles p, q, r; p_a, q_a, r_a; ... des quatre axes de similitude par rapport aux circonférences A, B, C. ωp, ωq, ωr coupent respectivement A aux points a et a', B en b et b', C en c et c', a, b, c étant plus rapprochés de ω respectivement que a', b', c'.

Les circonférences abc, $a'b'c'$ sont tangentes aux trois circonférences données.

On aurait de même les couples de circonférences $a_a b_a c_a$, $a'_a b'_a c'_a$, ..., en traçant ωp_a, ωq_a, ωr_a, ...

Construction.

Je trace les quatre axes de similitude.

$$\text{Op.} : (24R_1 + 12R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Je place le centre radical ω.

$$\text{Op.} : (16R_1 + 8R_2 + 2C_3).$$

Je cherche les douze pôles p, q, r, ... des quatre axes de similitude par rapport aux trois circonférences données.

Pour trouver un pôle, nous avons vu que, suivant les positions de T par rapport au cercle, il *faut* employer deux constructions différentes dont les symboles sont :

$$\text{Op.} : (4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3),$$

et................ $\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 5C_3)$.

Mais, comme ils sont équivalents, nous supposerons sans inconvénient, pour évaluer le symbole de la construction, que nous employons la seconde.

Les douze pôles se trouveront donc par

$$\text{Op.} : (24R_1 + 12R_2 + 84C_1 + 60C_3).$$

Je joins les douze pôles au point ω.

$$\text{Op.} : (24R_1 + 12R_2).$$

Ce qui place les huit circonférences chacune par leurs points de contact.

Pour en tracer une, je joins le point A au point de contact de cette circonférence sur la circonférence A et le point B au point de contact P de cette circonférence avec la circonférence B.

J'ai ainsi son centre O_1 par deux droites.

Enfin je trace $O_1(O_1P)$.

Les huit circonférences seront donc tracées par

$$\text{Op.} : (32R_1 + 16R_2 + 16C_1 + 8C_3).$$

et le symbole de la construction totale sera

$$\text{Op.}: (120\,R_1 + 60\,R_2 + 104\,C_1 + 72\,C_3)$$

Simplicité, 356 exactitude, 294; 60 droites, 72 cercles [1].

Solution de M. Folchi.

Je me reporte à la *fig.* 2, p. 235 des *Nouvelles Annales*, 1892, et je signale d'abord dans cette figure deux erreurs de lettres :

1° La lettre N′ qui est placée à côté de A′ doit être placée à la deuxième intersection du cercle MM′M″ et du cercle O′.

2° L'intersection de la droite NQ et du cercle O qui est marquée N′ doit être marquée N_1.

Je vais faire l'analyse graphique de la construction en supposant toujours que je veux tracer les huit cercles tangents aux trois cercles donnés; pour éviter des redites j'adopte sans les expliquer de nouveau les notations de M. *Fouché*.

Je trace les quatre axes de similitude; nous avons vu qu'on les obtient par le symbole

$$\text{Op.}: (24\,R_1 + 12\,R_2 + 4\,C_1 + 2\,C_3).$$

Je prends ensuite un point M arbitraire sur la circonférence O, ..., mais, puisqu'il est théoriquement arbitraire, je dois choisir le plus avantageux possible et

---

[1] Nous pourrions suivre de plus près la construction en appelant l le nombre de positions de T pour lesquelles nous employons la première méthode de construction du pôle; $12 - l$ sera le nombre de positions pour lesquelles nous employons la seconde et le symbole serait

$$\text{Op.}\ [(2l + 120)\,R_1 + (l + 60)\,R_2 + (104 - 2l)\,C_1 + (72 - l)\,C_3]$$

mais cette spécification nous semble inutile en général.

je prends pour M une intersection de la circonférence O avec OO''.

M'' se trouve placé et j'obtiens M' en traçant MS''.

Op : $(2R_1 + R_2)$.

Je trace le cercle MM'M''.

Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$.

Je trace MN qui coupe OO' en H. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je cherche les points de contact des deux tangentes HA, HA₁ menées de H au cercle O. Op. : $(7C_1 + 3C_3)$.

Je les ai par ce symbole très simple parce que :

1° Je n'ai pas besoin de mener le diamètre MOμ de la construction XIV, puisqu'il y a déjà le diamètre MO sur la figure.

2° Je n'ai pas besoin de tracer les tangentes HA, HA$_1$, puisque je ne me servirai que des points de contact A et A$_1$.

Je place les antihomologues A', A'', A$'_1$, A$''_1$ de A et de A$_1$ sur les deux autres cercles en menant quatre droites........................ Op. : $(8R_1 + 4R_2)$.

Je trace OA, O'A' qui se coupent en ω.

Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

Je trace OA$_1$, O'A$'_1$ qui se coupent en ω_1.

Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

Enfin je trace $\omega(\omega A)$, $\omega_1(\omega_1 A_1)$.

Op. : $(4C_1 + 2C_3)$,

qui sont la circonférence touchant extérieurement et la circonférence touchant intérieurement les trois circonférences données.

Je vois que tout ce qui a été fait jusqu'au tracé de MN inclus sert pour tracer les trois autres groupes de deux circonférences qui compléteront la solution; je n'ai donc qu'à répéter trois fois le symbole de ce qui a été construit après le tracé de MN, c'est-à-dire à répéter trois fois........... Op. : $(20R_1 + 10R_2 + 11C_1 + 5C_3)$, et ajouter cela au symbole des constructions analysées en détail jusqu'ici, pour avoir la construction totale ainsi obtenue par le symbole

$$\text{Op.} : (112R_1 + 56R_2 + 53C_1 + 26C_3).$$

Simplicité, 247; exactitude, 165; 56 droites, 26 cercles.

Solution de M. Mannheim.

Cette solution se trouve dans ce *Journal*, 1885, p. 108.

Soient O, O_1, O_2 les trois circonférences; o, o_1, o_2 leurs centres. Je mène par o, o_1, o_2 trois rayons parallèles et de même sens.

Soit a un point quelconque de O.

Au moyen de rayons parallèles, je construis sur O_1 et O_2, a_1, a_2 antihomologues de a et a'_2 antihomologue de a_1 sur O_2.

Au moyen d'un autre point quelconque α sur O je construis α_2, α'_2 analogues à a_2, a'_2.

Les droites $a_2\alpha'_2$, $a'_2\alpha_2$ se coupent en K, $a_2\alpha_2$, $a'_2\alpha'_2$ en K'.

La droite KK' coupe O_2 en deux points M_2, M'_2 qui sont les points de contact de O_2 avec deux des circonférences demandées.

Ces circonférences touchent O et O_1 en des points qui sont les antihomologues de M_2 et de M'_2.

Pour construire les trois autres couples de deux solutions, il faudra mener par o, o_1, o_2 des rayons parallèles, mais non plus de même sens.

Je désignerai par $+$ le sens adopté pour obtenir M_2 et M'_2 et par $-$ le sens opposé; nous prendrons pour les trois autres couples, les trois combinaisons de sens déterminées par le Tableau suivant :

Sens des rayons menés......	Par o.	Par o_1.	Par o_2.
Pour un des trois couples...	$-$	$-$	$+$
Pour le deuxième	$-$	$+$	$+$
Pour le troisième	$+$	$-$	$+$

Construction.

Traçons oo_1 qui coupe O en α, a et O_1 en a_1, α_1.

Ces quatre points se succédant sur oo_1 dans l'ordre α, a, a_1, α_1 .... Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Puisque les points indiqués a et α dans l'énoncé de la solution sont quelconques sur O, je prendrai pour ces points ceux que nous venons de nommer ainsi sur oo_1.

Je mène par o_2 une parallèle à oo_1 qui coupe O_2 en A et B, les points A, o_2, B se trouvant placés de façon que Ao_2B donne le sens $+$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

En suivant la solution indiquée, on verra que les huit points de contact se trouveront placés sur O_2 en opérant ainsi.

Tracer les huit droites qui joignent les quatre points α, a, a_1, α_1 à A et à B........ Op. : $(16R_1 + 8R_2)$.

Pour avoir chaque couple de points de contact il faut encore mener cinq droites, en tout vingt droites.

Op. : $(40R_1 + 20R_2)$.

Traçons maintenant les huit circonférences, d'abord celle qui touche O_2 en M_2; pour trouver le point M_1 où elle touche O_1, je joindrai M_2 au centre de similitude convenable de O_1 et de O_2, lequel est déjà placé sur l'épure par les droites menées de a_1 et α_1 à A et à B, et je tracerai O_2M_2, O_1M_1 qui se couperont au centre du cercle à tracer. Je tracerai ce cercle.

Les huit cercles seront donc tracés par

$$\text{Op.} : (48\,R_1 + 24\,R_2 + 16\,C_1 + 8\,C_3)$$

et la construction totale aura pour symbole

$$\text{Op.} : (108\,R_1 + 54\,R_2 + 20\,C_1 + 10\,C_3).$$

Simplicité, 192 ; exactitude, 128 ; 54 droites, 10 cercles.

Résumé.

La solution de *Viète* donne comme symbole

$$\text{Op.} : (52\,R_1 + 26\,R_2 + 98\,C_1 + C_2 + 58\,C_3).$$

Simplicité, 234 ; exactitude, 151 ; 26 droites, 58 cercles.

Celle de *Bobillier* et *Gergonne* :

$$\text{Op.} : (121\,R_1 + 60\,R_2 + 104\,C_1 + 72\,C_3).$$

Simplicité, 356 ; exactitude, 224 ; 60 droites, 72 cercles.

Celle de M. *Maurice Fouché* :

$$\text{Op.} : (112\,R_1 + 56\,R_2 + 53\,C_1 + 26\,C_2).$$

Simplicité, 247 ; exactitude, 165 ; 56 droites, 26 cercles.

Celle de M. *Mannheim* :

$$\text{Op.} : (108\,R_1 + 54\,R_2 + 20\,C_1 + 10\,C_3).$$

Simplicité, 192 ; exactitude, 128 ; 54 droites, 10 cercles.

La moins bonne *pour la construction* est donc la célèbre et didactiquement élégante solution de *Bobillier* et *Gergonne* ; son coefficient de simplicité, c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires qu'elle exige, est : 356. Cela surprendra certainement au premier moment beaucoup de géomètres ; j'ai été bien surpris moi-même.

Les deux solutions de M. *Fouché* et de *Viète* s'équivalent à peu près, avec une supériorité cependant du côté de la seconde.

Celle de M. *Mannheim,* qui n'avait, par conséquent, point été suffisamment remarquée, est de beaucoup la meilleure au point de vue où nous nous plaçons, mais bonne pour le cas général, elle ne s'applique pas à tous les cas particuliers ; je ne vois point, par exemple, comment elle conduit à la construction des cercles tangents à un cercle, à une droite, et passant par un point. Si c'est une infériorité *théorique,* elle importe bien peu au dessinateur ; car lorsque parmi les cercles donnés il y en a qui sont les variétés : point ou droite, le problème est plus simple à résoudre que le problème où l'on a réellement trois cercles ; elle s'applique du reste à plusieurs de ces cas particuliers.

J'avais déjà comparé, en 1888, dans le journal *Mathesis,* p. 241, les deux solutions de *Viète* et de *Bobillier* et *Gergonne,* et j'avais donné les symboles suivants :

Solution de *Viète* :

$$\text{Op. : } (100R_1 + 55R_2 + 91C_1 + 5C_2 + 84C_3).$$

Simplicité, 335 ; exactitude, 196 ; 55 droites, 84 cercles.

Solution de *Bobillier* et *Gergonne* :

$$\text{Op. : } (169R_1 + 85R_2 + 134C_1 + 112C_3).$$

Simplicité, 500 ; exactitude, 303 ; 85 droites, 112 cercles.

Résultats très sensiblement *dans le même rapport* que ceux que nous venons de donner, mais numériquement fort différents. La raison de cette différence vaut la peine que nous l'expliquions ; car elle est une démonstration par le fait de l'utilité de l'*art des constructions ;*

d'abord, je venais d'avoir l'idée de la méthode de comparaison que j'ai exposée ici et je n'apportais pas toujours, dans les applications que j'en faisais, toutes les simplifications dont la méthode est susceptible ; ensuite, et *surtout,* je me servais des constructions *classiques* que j'avais nombrées telles quelles, sans examen ; car, je ne me doutais pas — ce que la méthode m'a montré depuis — que ces constructions classiques si anciennes, si universellement adoptées, étaient presque toutes trop compliquées ; ainsi j'employais, par exemple, pour construire le pôle d'une droite, une construction classique dont le symbole avait 22 pour simplicité au lieu de 15, comme celui de la construction employée maintenant par nous, etc.