Nouvelles annales de mathématiques

Audibert

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1891

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 436-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__436_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1891;

PAR M. AUDIBERT.

Prenons pour axes des y et des x les deux côtés CA et CB du triangle donné.

Les coniques S et S' sont respectivement circonscrites aux quadrilatères PQMN et PQM'N' dont les côtés sont représentés par les équations

PQ,	$y - cx + d = 0,$
CP,	$y - px = 0,$
CQ,	$y - qx = 0,$
MN.	$mx + ny + r = 0,$
M'N'.	$m'x - n'y + r' = 0.$

Les équations des coniques sont alors

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{aligned}&(y+px)(y+qx)\\&\quad -(y+cx+d)(mx+ny+\varepsilon)=0.\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{S}')\qquad \left\{\begin{aligned}&(y+px)(y+yx)\\&\quad +(y+cx+d)(m'x+n'y+\varepsilon')=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{CA}=b,\qquad \mathrm{CB}=a,$$

les conditions de tangence de ces coniques à l'un des côtés du triangle, au point A pour S, au point B pour S', se traduiront par les formules

$$n=-b\,\frac{b+2d}{(b+d)^2},\qquad r=\frac{b^2d}{(b-d)^2},$$

$$m'=-apq\,\frac{ac+2d}{(ac+d)^2},\qquad r'=\frac{a^2dpq}{(ac+d)^2},$$

m et n' restent arbitraires.

1° Les droites MN et M'N' passent chacune par un point fixe, puisque l'une et l'autre coupent les axes en des points A_1 et B_1 tels que

$$\mathrm{CA}_1=-\frac{r}{n}=\frac{bd}{b+2d}=b_1,$$

$$\mathrm{CB}_1=-\frac{r'}{m'}=\frac{ad}{ac+2d}=a_1,$$

valeurs indépendantes des paramètres m et n' demeurés arbitraires.

2° Si l'on substitue le triangle $\mathrm{CA}_1\mathrm{B}_1$ au triangle CAB dans la définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points A_2 et B_2, et l'on aurait de même

$$\mathrm{CA}_2=\frac{b_1d}{b_1+2d}=b_2,\qquad \mathrm{CB}_2=\frac{a_1d}{a_1c+2d}=a_2,$$

et ainsi de suite.

Ces relations peuvent s'écrire

$$\frac{1}{b_1} = \frac{2}{b} + \frac{1}{d}, \qquad \frac{1}{a_1} = \frac{2}{a} + \frac{c}{d},$$

$$\frac{1}{b_2} = \frac{2}{b_1} - \frac{1}{d}, \qquad \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_1} - \frac{c}{d},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{bn} = \frac{2}{b_{n-1}} + \frac{1}{d}, \qquad \frac{1}{an} = \frac{2}{a_{n-1}} + \frac{c}{d}.$$

On en tire

$$\frac{1}{bn} = \frac{2^n}{b} + \frac{1}{d}(2^n - 1), \qquad \frac{1}{an} = \frac{2^n}{a} - \frac{c}{d}(2^n - 1).$$

Mais a_n et b_n étant les coordonnées à l'origine de la droite $A_n B_n$,

$$\frac{y}{bn} + \frac{x}{an} = 1,$$

l'équation de cette ligne deviendra pour n infini

$$\frac{b+d}{b} y + \frac{ac+d}{a} x = 0.$$

3° Soient $y = \alpha x$, $y = \alpha' x$ les deuxièmes tangentes menées de l'origine aux coniques S et S'. La condition pour que ces tangentes forment avec CP et CQ un faisceau harmonique est

$$(1) \qquad \frac{q+\alpha}{p+\alpha} = -\frac{q+\alpha'}{p+\alpha'}.$$

D'autre part, on trouve pour les coefficients angulaires des deux tangentes

$$\alpha = \frac{(cr - dm)^2 - 4rdpq}{4rd(p+q) - \dfrac{4bd}{b-d}(cr - dm)},$$

$$\alpha' = \frac{4r'd(p+q) - \dfrac{4adra}{ac+d}(r' - dn')}{(r' - dn')^2 - 4dr'}.$$

Posant

$$cr - dm = m_1, \qquad r' - dn' = n_1,$$

$$\frac{-2bd}{b+d} = k, \qquad \frac{-2ad}{ac+d} = k', \qquad \sqrt{\frac{-q}{p}} = fl.$$

et introduisant les valeurs de α et de α' dans la formule (1), elle devient, après avoir extrait la racine carrée des deux membres,

$$(2) \qquad \frac{m_1 + kq}{m_1 + kp} = \pm fl \frac{n_1 + k'p}{n_1 + k'q},$$

qu'on peut écrire encore

$$\frac{k(q-p)}{m_1 + kp} + 1 = \pm fl \left[\frac{k'(p-q)}{n_1 + k'q} + 1 \right].$$

Il faut pour la réalité de fl que p et q soient de signes contraires.

Les valeurs de m_1 et de n_1 se déduisent de celles de m et n' tirées des équations

$$\xi \frac{dS}{dx} + \eta \frac{dS}{dy} + \frac{dS}{dz} = 0, \qquad \xi \frac{dS'}{dx} + \eta \frac{dS'}{dy} + \frac{dS'}{dz} = 0,$$

dans lesquelles x et y sont les coordonnées du point de rencontre des deux polaires du point $H(\xi, \eta)$.

Ces équations étant du premier degré en x, y, m et n' donneront pour ces deux derniers paramètres des valeurs de la forme

$$\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'}.$$

Celles qu'on en déduira pour m_1 et n_1 seront aussi de même forme, et, en les introduisant dans la formule (2), on aura finalement pour le lieu cherché une équation du second degré, c'est-à-dire une conique.

4° Les points communs aux coniques S et S' satisferont à l'équation

$$S - S' = 0$$

ou

$$(y + cx + d)[(m - m')x + (n - n')y + r - r'] = 0.$$

Or, $y + cx + d = 0$ étant l'équation de la droite PQ,

$$(3) \qquad (m - m')x + (n - n')y + r - r' = 0$$

représente la seconde sécante commune.

Quand cette droite sera tangente à S ou à S', les deux coniques se toucheront.

On aura alors

$$\frac{\frac{dS}{dx}}{m - m'} = \frac{\frac{dS}{dy}}{n - n'} = \frac{\frac{dS}{dz}}{r - r'},$$

et la même relation en S', soit quatre équations dont deux sont surabondantes.

A l'aide de $S = 0$, $S' = 0$ on fera disparaître m et n' des numérateurs, et l'on tirera les valeurs des rapports $\frac{m - m'}{r - r'}$, $\frac{n - n'}{r - r'}$ qu'on portera dans (3). Le résultat sera l'équation du quatrième degré

$$\begin{aligned}(y + cx + d)^3(rr' + rm'x + r'ny) &+ (y + cx - d)^2 \\ \times[(p + q)(r + r')xy &+ 2rpqx^2 + 2r'y^2) \\ -(y + cn + d)&(y + pn)(y + pn) \\ \times[(cr + dm')x &+ (r' + dn)y + d(r + r')] \\ &- \overline{d(y + px)(y + qx)}^2 = 0.\end{aligned}$$