NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FOUCHÉ

Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 404-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__404_0>

SUR LES CERCLES QUI TOUCHENT TROIS CERCLES DONNÉS OU QUI LES COUPENT SOUS UN ANGLE DONNÉ [1];

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Agrégé de l'Université.

APPLICATION AUX CONIQUES.

On sait que la transformation par pôles et polaires réciproques transforme tous les cercles du plan en coniques ayant pour foyer commun le centre du cercle directeur, et, réciproquement, les coniques admettant ce point pour foyer se transforment en des cercles. Les points d'intersection de deux cercles deviennent les tangentes communes aux deux coniques correspondantes, lesquelles se réduisent à deux, puisque les deux coniques ont déjà en commun les tangentes imaginaires issues du foyer.

Les tangentes AT et AT′ aux deux cercles en leur point d'intersection deviennent les points de contact de la tangente commune aux deux coniques, et l'angle de ces tangentes, c'est-à-dire l'angle des deux cercles, est égal à l'angle des droites qui joignent le foyer commun aux points de contact de la tangente commune, ce qui donne déjà le théorème connu :

Les deux tangentes communes à deux coniques confocales limitées à leurs points de contact sont vues du foyer commun sous un même angle.

J'appellerai cet angle *angle focal* des deux coniques. Deux cercles tangents se transforment en deux coniques

(1) Voir même Tome, p. 227 et 331.

tangentes. L'axe radical de deux cercles devient le point de rencontre des tangentes communes de deux coniques.

Un faisceau de cercles se transforme en une famille de coniques confocales enveloppant deux droites. Une famille de cercles enveloppant deux cercles fixes devient une famille de coniques confocales enveloppant deux coniques confocales fixes. Un centre radical commun à plusieurs cercles équivaut à un cercle orthogonal : il devient une conique fixe qui a avec toutes les autres un angle focal droit. Un centre de similitude étant l'intersection de deux tangentes communes devient la corde commune de deux coniques. Un axe de similitude devient le point d'intersection de trois cordes communes nécessairement concourantes. Il est alors facile de transformer la théorie précédente. On trouve en particulier les théorèmes suivants :

1° *Si l'on considère trois coniques confocales, toutes les coniques confocales qui ont avec elles un même angle focal se répartissent en quatre familles dont chacune est composée de coniques tangentes à deux droites fixes qui passent par le point de concours de trois cordes communes des coniques données.*

2° *Étant données deux coniques confocales, toutes les coniques confocales qui ont avec chacune d'elles des angles focaux invariables se répartissent en deux familles dont chacune est composée de coniques confocales enveloppant deux coniques fixes, ayant avec une autre conique fixe un angle focal droit et telles que l'une des cordes communes de deux quelconques d'entre elles passe par le point de rencontre des tangentes communes aux deux coniques données.*

On pourra aussi résoudre les deux problèmes suivants :

1° Étant données trois coniques confocales, en trouver une autre qui soit tangente à ces trois-là.

2° Étant données trois coniques confocales, en trouver une autre qui ait avec ces trois-là des angles focaux déterminés.

Les deux problèmes admettent chacun huit solutions réelles ou imaginaires.

Les coniques confocales sont celles qui sont tangentes à deux droites fixes imaginaires menées par le foyer commun. Une seconde transformation par pôles et polaires réciproques par rapport à une conique quelconque qui peut être imaginaire les transforme en coniques passant par deux points fixes, et une nouvelle transformation donne les coniques tangentes à deux droites fixes. On peut étendre à ces coniques ceux des résultats précédents qui ne concernent pas les angles. Donc :

Si parmi toutes les coniques tangentes à deux droites fixes on considère celles qui sont tangentes à deux coniques fixes tangentes aux mêmes droites, elles se répartissent en deux familles telles que l'une des cordes communes de deux coniques de la même famille passe par le point de rencontre des deux tangentes fixes.

Si parmi toutes les coniques qui passent par deux points fixes on considère toutes celles qui sont tangentes à deux coniques fixes passant par les mêmes points, elles se répartissent en deux feuilles telles que deux des tangentes communes à deux coniques de la même famille se coupent sur la droite qui joint les deux points fixes.

EXTENSION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX CERCLES TRACÉS SUR LA SPHÈRE.

L'inversion transforme une famille de cercles tracés sur le plan en une famille de cercles tracés sur la sphère. Si les cercles ont un centre radical commun C', les cercles transformés seront dans des plans passant en un point fixe D'. On le reconnaît en considérant la sphère qui passe par le pôle d'inversion P et le cercle considéré O', et qui, par la transformation, devient le plan du cercle transformé. Le rayon d'inversion PC' coupe cette sphère en un second point D' tel que $C'D' \times C'P$ est égal à la puissance de C' par rapport au cercle O'. Donc le point D' reste invariable quand le cercle O' varie, et par suite le plan de O passe par le point fixe D, transformé de D'. Si Ω est le centre de la sphère, la droite ΩD coupe la sphère en un point C, qui sera appelé le centre radical commun de tous les cercles O. Réciproquement, tout cercle dont le plan passe par D est le transformé d'un cercle du plan ayant avec les autres le point C' pour centre radical.

Un faisceau de cercles se transforme en une famille de cercles dont les plans passent par une droite fixe, car chaque point de l'axe radical donne comme le point C', un point D par où passe le plan du cercle. Ce plan variable passe donc par une infinité de points qui ne peuvent être qu'en ligne droite. Le plan déterminé par cette droite et le centre de la sphère coupe la sphère suivant un grand cercle qui est *l'axe radical des cercles* O et qui est perpendiculaire au grand cercle lieu de leurs centres. On appelle encore faisceau ces familles de cercles.

En transformant les théorèmes II et III, on trouve :

Théorème XII. — *Les cercles isogonaux à deux cercles de la sphère se répartissent en deux groupes dont chacun est formé des cercles dont les plans passent par un point fixe.*

Parmi tous les cercles isogonaux se trouvent des grands cercles : ce sont ceux qu'on obtient en faisant tourner un plan autour de la droite ΩD qui joint le centre au point fixe. Il en résulte que *tous les grands cercles isogonaux à deux cercles donnés se répartissent en deux faisceaux.*

Parmi tous les grands cercles isogonaux figurent les cercles tangents si ceux-ci sont réels. Donc les sommets des faisceaux sont les centres de similitude des deux cercles donnés. Ce sont aussi, d'après le théorème actuel, les centres radicaux des cercles isogonaux. Il y en a en tout quatre, deux symétriques pour chaque groupe de cercles isogonaux. Cette remarque complète l'analogie avec les théorèmes I et II.

Le théorème IV devient, en tenant compte de la remarque précédente :

Théorème XIII. — *Les cercles isogonaux à trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux, dont chacun admet pour axe radical l'un des quatre axes de similitude des trois cercles donnés.*

Le lieu des pôles des cercles isogonaux d'un même faisceau est le grand cercle perpendiculaire à l'axe de similitude mené par le centre radical des trois cercles donnés, parce que parmi tous les cercles isogonaux figure le cercle orthogonal aux trois cercles donnés.

Le théorème V subsiste également parce qu'il exprime que le point H est le centre radical commun à tous les cercles isogonaux et au cercle donné O. On le démontre directement en remarquant que le point H est sur le rayon de la sphère qui passe par l'intersection de l'axe du faisceau avec le plan du cercle O. Il résulte de là que :

La construction indiquée pour tracer un cercle tangent à trois cercles donnés s'applique aux cercles tracés sur la sphère. Il y a encore huit solutions réelles ou imaginaires.

Les conclusions de la discussion subsistent en entier.

On le reconnaît facilement par l'inversion en s'appuyant sur les remarques suivantes :

1° Deux cercles de la sphère qui se coupent se transforment en deux cercles du plan qui se coupent également.

2° Deux cercles de la sphère extérieurs ou intérieurs se transforment respectivement en deux cercles du plan extérieurs ou intérieurs si l'on prend pour pôle d'inversion un point de la surface de la sphère extérieure à la fois aux deux cercles, d'où il suit qu'en choisissant le pôle d'inversion sur la sphère extérieur à la fois aux trois cercles donnés ceux-ci conserveront dans le plan la disposition qu'ils avaient sur la sphère.

Le théorème VIII donne le résultat suivant :

Théorème XIV. — *Les cercles de la sphère qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants sont les cercles de deux familles telles que tous les cercles d'une même famille touchent deux cercles fixes et ont un centre radical commun,* ou bien, *et dont les plans passent par un point fixe.*

On en déduit immédiatement, en supposant les angles nuls :

Tous les cercles de la sphère tangents à deux cercles fixes constituent deux familles dont chacune est composée de cercles dont les plans passent par un point fixe, ce qui du reste est une conséquence du théorème XII.

La propriété relative à l'existence simultanée d'un faisceau et d'une famille de cercles tels que tous les cercles du faisceau coupent sous un même angle chaque cercle de la famille s'applique également à la sphère. Parmi les cercles du faisceau il y a nécessairement un grand cercle et un seul; celui-ci ne peut être isogonal à deux cercles de la famille que s'il passe par leur centre de similitude. Donc :

THÉORÈME XV. — *Tous les cercles de la famille considérée ont un axe de similitude commun, ce qui complète l'analogie des théorèmes VIII, IX, X.*

Enfin l'analogie se poursuit de la même manière pour la résolution des problèmes, sauf pour les problèmes III et VIII, pour lesquels la construction indiquée ne s'applique pas à la sphère; mais on pourra les résoudre en transformant par inversion la sphère en un plan. Pour le problème VIII, on pourra aussi employer la construction très simple indiquée par M. Tarry qui s'applique à la sphère. Dans tous les cas, et pour tous les problèmes, le nombre des solutions reste le même.

EXTENSION AUX SPHÈRES.

Cette extension est tellement facile, au moins en partie, qu'il suffira d'énoncer les théorèmes avec une courte indication de la démonstration lorsque cela sera nécessaire.

THÉORÈME XVI. — *Toute sphère qui passe par deux points antihomologues à deux sphères est isogonale à ces deux-là.*

THÉORÈME XVII. — *Toute sphère isogonale à deux autres les coupe suivant deux cercles antihomologues.*

THÉORÈME XVIII. — *Toutes les sphères isogonales à deux sphères fixes se répartissent en deux groupes dont chacun est constitué par les sphères telles que par rapport à chacune d'elles la puissance d'un des centres de similitude des sphères donnés est égale au module d'inversion des deux sphères données par rapport à ce centre.*

Pour ces deux théorèmes il suffit de considérer le plan qui passe par les centres des deux sphères fixes et d'une sphère mobile.

Les sphères orthogonales aux deux sphères fixes appartiennent aux deux groupes.

Théorème XIX. — *Les sphères isogonales à trois sphères fixes se répartissent en quatre familles dont chacune est constituée par les sphères admettant pour axe radical l'un des axes de similitude des trois sphères données.*

Chacune de ces quatre familles se compose de sphères passant par deux points fixes de l'axe de similitude. Le lieu de leurs centres est le plan perpendiculaire à l'axe de similitude considéré mené par l'axe radical des trois sphères données.

Théorème XX. — *Les plans des cercles d'intersection de toutes les sphères isogonales à trois sphères données et appartenant à une même famille avec l'une des sphères données coupent l'axe de similitude correspondant en un point fixe.*

Parmi les sphères isogonales figurent les sphères ω tangentes aux trois sphères données O, O', O''. Le plan du cercle d'intersection de ω et O devient alors le plan tangent au point de contact T de ω avec O. Il doit couper l'axe de similitude en un point fixe H; donc, quand ω varie, il enveloppe le cône circonscrit du sommet H à la sphère O et le lieu du point C de contact T est un cercle. On obtient ainsi le théorème de Dupuis :

Théorème XXI. — *Le lieu des points de contact des sphères tangentes à trois sphères fixes avec l'une de ces sphères se compose de quatre cercles.*

Il y a en effet un cercle pour chaque famille.

Théorème XXII. — *Les sphères isogonales à quatre* *sphères fixes constituent huit faisceaux dont chacun admet pour plan radical l'un des plans de similitude des quatre sphères fixes.*

Démonstration analogue à celle du théorème IV.

Le lieu des centres de chaque faisceau est la perpendiculaire abaissée du centre radical des quatre sphères fixes sur le plan de similitude considéré.

Remarque. — Le théorème tombe en défaut si les quatre sphères données ont un axe de similitude commun. Soit alors M un point de la sphère O. Puisque les centres de similitude de O avec $O'O''O'''$ sont en ligne droite, les quatre points antihomologues deux à deux M, M', M'', M''' seront dans un même plan passant par l'axe de similitude. En général, par ces quatre points on ne pourra faire passer aucune sphère, et les sphères isogonales aux quatre sphères données se réduiront alors aux plans passant par l'axe de similitude. Mais si les quatre points M, M', M'', M''' sont sur une même circonférence, toute sphère passant par cette circonférence sera isogonale, et plus généralement toutes les sphères qui auront avec celle-là pour axe radical l'axe de similitude seront isogonales aux quatre sphères données. Alors l'un des quatre faisceaux de sphères isogonales est remplacé par une famille plus générale de sphères ayant un axe radical commun, comme s'il n'y avait que trois sphères données. Cela tient à ce que toute sphère isogonale à trois des sphères données et appartenant à la famille considérée coupe la quatrième sous le même angle que les trois premières.

Parmi toutes les sphères isogonales figurent une infinité de sphères tangentes aux quatre sphères données, dont les points de contact sur la sphère O sont sur un certain cercle φ. Si par l'axe de similitude on fait passer un plan quelconque qui coupe φ en A, il y aura une sphère tangente passant par A, et les quatre cercles d'intersection du plan avec les quatre sphères seront tangents au cercle d'intersection du plan avec la sphère tangente. On peut alors énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME XXIII. — *Étant données quatre sphères ayant leurs centres de similitude en ligne droite, on prend sur ces sphères quatre points* M, M′, M″, M‴, *tels que trois d'entre eux soient antihomologues du quatrième relativement aux centres de similitude qui sont en ligne droite. S'il arrive que le quadrilatère* M M′ M″ M‴ *soit inscriptible, il en sera de même de tous les quadrilatères analogues qu'on pourra former de la même manière.*

THÉORÈME XXIV. — *Si quatre sphères ayant leurs centres de similitude en ligne droite sont coupées par un plan passant par l'axe de similitude suivant quatre cercles tangents à un même cercle, tout plan passant par l'axe de similitude les coupera aussi suivant quatre cercles tangents à un même cercle.*

Ce cas particulier est celui où les quatre sphères font partie d'une famille qui sera étudiée plus loin.

THÉORÈME XXV. — *Les plans des cercles d'intersection de toutes les sphères d'un même faisceau isogonales à quatre sphères fixes avec l'une de ces sphères coupent le plan de similitude correspondant suivant une droite fixe.*

En effet, soit (H) la droite d'intersection du plan de similitude avec le plan du cercle d'intersection d'une des sphères isogonales ω et d'une des sphères données O. Quand ω varie, tous les points de (H) conservent la même puissance par rapport à ω et à O.

De là résulte *la construction d'une sphère tangente* *à quatre sphères données* absolument analogue à celle qui résout le problème plan correspondant.

Après avoir choisi trois centres de similitude de la sphère donnée O avec les sphères O', O'', O''', on prend arbitrairement sur O un point quelconque M, et l'on cherche l'antihomologue de M sur chacune des trois autres sphères données. La sphère qui passe par les quatre points ainsi déterminés coupe la sphère O suivant un cercle dont le plan coupe suivant une droite (H) le plan des trois centres de similitude considérés. De (H) on mène à la sphère O un plan tangent qui la touche en A et l'on construit les antihomologues de A sur les trois autres sphères. La sphère qui passe par ces quatre points répond à la question.

Le problème admet seize solutions.

La discussion faite pour le problème plan ne s'applique pas au problème actuel. Du reste, il n'est pas vrai que les seize solutions du problème soient toutes réelles toutes les fois que les quatre sphères données sont deux à deux extérieures. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer trois sphères égales extérieures deux à deux et les sphères qui leur sont tangentes avec des contacts de même espèce et qui correspondent ainsi à l'axe de similitude rejeté à l'infini. Toutes ces sphères tangentes ont leurs centres en ligne droite sur l'axe radical des trois sphères données, comme on le reconnaît aisément par la considération des points antihomologues, et elles enveloppent le tore enveloppé par l'une des sphères données, qu'on ferait tourner autour de cet axe radical. Dès lors si la quatrième sphère donnée est à l'intérieur de ce tore, le problème est manifestement impossible. Cette simple remarque suffit à montrer quelle serait la complication de la discussion complète. Dans le cas général, le tore est remplacé par une autre surface du quatrième ordre dont il sera parlé plus loin.

Si les quatre sphères ont un axe de similitude commun, cet axe contient six centres de similitude, et le plan de similitude correspondant est indéterminé. Dans ce cas, les deux sphères correspondant à cet axe se réduisent, en général, aux deux plans tangents communs; mais si les sphères se trouvent dans le cas particulier signalé dans la remarque du théorème XII, le problème est indéterminé.

Les problèmes relatifs aux sphères isogonales se résolvent comme les problèmes plans correspondants. En particulier, la recherche d'une sphère isogonale à cinq sphères données se ramène à l'intersection d'une droite et d'un plan. Il y a seize solutions réelles ou imaginaires. On déduit de ce problème un théorème relatif à des droites ou à des plans concourants dont il serait facile de reconstituer l'énoncé.

Le problème qui consiste à trouver une sphère coupant quatre sphères données sous un même angle donné revient à trouver une sphère d'un faisceau coupant une sphère donnée sous un angle donné. Il se ramène au problème plan correspondant par la considération du plan qui passe par le lieu des centres du faisceau et le centre de la sphère donnée.

Théorème XXVI. — *Toutes les sphères qui coupent deux sphères fixes sous des angles invariables se répartissent en deux familles ayant un centre radical commun situé sur la ligne des centres des deux sphères et un plan de similitude commun, qui est le plan radical des deux sphères fixes.*

Les sphères d'une même famille admettent pour sphères isogonales toutes les sphères du faisceau défini par les deux sphères données, parmi lesquelles figurent des sphères tangentes réelles ou imaginaires, de sorte que chaque famille considérée est une famille de sphères tangentes à deux sphères fixes.

THÉORÈME XXVII. — *Toutes les sphères qui coupent trois sphères fixes sous des angles invariables se répartissent en quatre familles telles que toutes les sphères d'une même famille ont un axe de similitude commun qui est l'axe radical des trois sphères fixes, et un axe radical commun.*

En effet, on reconnaît d'abord, comme dans le théorème VIII, que, si O est l'une des sphères de l'énoncé, toutes les sphères transformées de O par inversion avec un pôle pris sur l'axe radical (D) des trois sphères données ω, ω', ω'', et un module égal à la puissance commune de ce pôle par rapport à ces trois sphères, ω, ω', ω'', formeront une famille répondant à l'énoncé.

Si O, O′, O″, O‴ sont quatre sphères de l'énoncé, ω, ω', ω'' peuvent leur être isogonales par rapport à trois plans de similitude différents dont l'intersection ne serait pas un centre de similitude de deux des quatre sphères données. Alors chacune de ces quatre sphères sera le point de départ d'une famille définie comme plus haut.

Enfin, d'après le théorème précédent, il existe sur chacune des droites de centre $\omega\omega'$, $\omega\omega''$, $\omega''\omega'''$ un point C qui a la même puissance par rapport à toutes les sphères d'une même famille. Ces trois points sont donc en ligne droite et définissent un axe radical (E) commun à toutes ces sphères.

Pour montrer que toute autre sphère de l'énoncé fait partie d'une de ces quatre familles, je considère cinq sphères a, b, c, d, e, répondant aux conditions de l'énoncé. ω, ω', ω'' leur seront isogonales relativement à certains centres de similitude. Si l'on considère quatre sphères a, b, c, d, les centres de similitude par rapport auxquels l'une des sphères ω, ω', ω'' leur est isogonale seront dans un même plan de similitude, de sorte qu'ils pourront être définis par le sens des rayons de ces quatre sphères. De même, dans le groupe $abce$, les centres de similitude seront définis par le sens des rayons, les sens des trois premières sphères restant les mêmes, puisque leurs centres de similitude n'ont pas changé. Il ne reste plus à définir que le centre de similitude de groupe de. Or, si l'on considère le groupe cde, le centre cherché doit être en ligne droite avec ceux de cd et de ce qui sont définis par le sens des rayons. Donc le sens de de est bien celui qui est défini par le sens des rayons de d et de e. Cela posé, je représenterai par a, b, c, d, e les sphères prises dans des sens quelconques, et a', b', c', d', e' les sphères prises dans les sens inverses.

Comme on peut changer à la fois les sens de toutes les sphères, on peut toujours en représenter trois par des lettres non accentuées, de sorte qu'on obtiendra toutes les combinaisons en accentuant 0, 1 ou 2 des cinq lettres, de toutes les manières possibles. Il faut faire trois de ces combinaisons pour obtenir les trois combinaisons des centres de similitude correspondant aux trois sphères données ω, ω', ω''.

S'il y a deux lettres α, β ayant le même accent dans chacune des trois combinaisons, le centre de similitude des sphères $\alpha\beta$ ou $\alpha'\beta'$ fera partie des trois combinaisons; de même, s'il y a deux lettres ayant des accents contraires dans chacune des trois combinaisons, le centre de similitude des deux sphères $\alpha\beta'$ ou $\alpha'\beta$ fera partie des trois combinaisons. Soit alors $abcde$ le sens des sphères dans la première combinaison. Si, dans une des deux autres combinaisons, on n'accentue qu'une lettre au plus, ou si, dans les deux combinaisons, il y a une lettre accentuée commune, il y aura au plus trois lettres accentuées et les deux autres resteront sans accent dans chaque combinaison. Si, au contraire, on accentue dans chaque combinaison deux lettres différentes, par exemple *bc* et *de*, on aura le tableau

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e' \\ a & b' & c' & d & e \end{array}$$

dans lequel les lettres *bc* figurent accentuées de même manière sur chaque ligne.

De toute manière il y a au moins deux sphères auxquelles les trois sphères données sont isogonales relativement au même centre de similitude, et celles-là font partie d'une même famille, car elles s'échangent par l'inversion faite du centre de similitude commun comme pôle.

Toutes les sphères des quatre familles admettent pour sphères isogonales toutes les sphères qui ont avec ω, ω', ω'' le même axe radical. Parmi celles-ci se trouvent les sphères isogonales coupant les sphères de la famille sous un angle nul donne.

Toutes les sphères d'une même famille sont donc tangentes à une infinité de sphères, ayant un axe radical commun

Il en résulte que ces sphères tangentes et les sphères O forment deux familles de sphères conjuguées, telles que toutes les sphères de la première famille sont tangentes à toutes les sphères de la seconde. Ces deux familles admettent ainsi pour enveloppe une même surface qui est le lieu de leurs points de contact. D'après le théorème de Dupuis, la caractéristique de la sphère variable de chaque famille est donc un cercle. Or la caractéristique d'une sphère variable est une ligne de courbure de la surface enveloppe. Toutes les sphères d'une même famille ont leurs centres dans un même plan passant par l'axe radical des sphères de l'autre famille, puisque cet axe est leur axe de similitude commun. Parmi celles de l'autre famille il y en a deux qui ont leur centre dans ce plan-là : ce sont celles qui ont pour grand cercle l'un des cercles φ, φ_1, tangent aux trois grands cercles des trois sphères de la première famille situés dans le plan des centres, ce cercle tangent correspondant à l'axe de similitude qui reste invariable pour la première famille. Dès lors, tous les grands cercles des sphères de la première famille sont tangents à ces deux cercles φ et φ_1, et le lieu de leurs centres est une conique, ayant pour foyers les centres de φ et φ_1. D'un autre côté, le lieu des centres des sphères de la seconde famille est aussi une conique située dans un plan perpendiculaire au premier, et cette conique comprenant les centres de φ et φ_1 passe par les foyers de la première.

Enfin on remarquera que des sphères ayant un axe de similitude commun ont deux plans tangents communs, et des sphères ayant un axe radical commun passent par deux points fixes. Nos deux familles conjuguées sont donc des familles de sphères passant par deux points fixes, et admettant deux plans tangents communs.

De plus, les plans tangents communs peuvent être considérés comme des sphères, on peut leur appliquer le théorème de Dupuis, et le lieu des points de contact est un cercle. Si même on se reporte à la démonstration du théorème de Dupuis (Th. XX) et qu'on suppose que la sphère O soit remplacée par un plan, on reconnaît facilement que le centre du cercle est le point d'intersection de l'axe radical avec le plan tangent commun.

D'autre part, parmi toutes les sphères isogonales aux sphères O, lesquelles sont les sphères ayant avec ω,

ω', ω'' le même axe radical, figurent non seulement les deux plans tangents, mais encore tous les plans passant par la même droite, et, en particulier, ceux qui passent aussi par l'un des points communs à toutes les sphères O. Donc, en leurs points communs, les sphères O sont également inclinées sur ces mêmes plans, c'est-à-dire que leurs plans tangents enveloppent un cône de révolution.

On peut alors énoncer les théorèmes suivants :

Théorème XXVIII. — *Si une sphère varie en restant tangente à trois sphères fixes, elle reste aussi tangente à une infinité d'autres sphères, et, en particulier, à deux plans fixes réels ou imaginaires. De plus elle passe par deux points fixes réels ou imaginaires. Le lieu de son point de contact avec chacun des plans fixes est un cercle, et son plan tangent en chacun des deux points fixes enveloppe un cône de révolution.*

Théorème XXIX. — *Il existe une infinité de systèmes conjugués de deux familles de sphères passant par deux points fixes et tangentes à deux plans fixes, les points fixes de chaque famille étant sur la droite d'intersection des plans fixes de l'autre famille, et telles que toutes les sphères d'une famille sont tangentes à toutes les sphères de l'autre. Ces deux familles ont une enveloppe commune dont les lignes de courbure sont planes et circulaires dans les deux systèmes. Le lieu des centres de courbure principaux de cette surface enveloppe se compose de deux coniques dont chacune est la focale de l'autre.*

Cette surface admet deux points coniques où les cônes tangents sont de révolution, et deux plans circonscrits qui les touchent suivant un cercle. Elle se reproduit par inversion faite au moyen d'un pôle pris d'une manière quelconque sur l'une des deux droites fixes qui joignent les points fixes et par où passent les plans tangents fixes.

On lui a donné le nom de *cyclide*. Le tore en est un cas particulier.

THÉORÈME XXX. — *Si l'on considère deux familles conjuguées de sphères tangentes, le cercle lieu des points de contact d'une d'entre elles avec les sphères de l'autre famille rencontre à angle droit les cercles analogues tracés sur les sphères de l'autre famille.*

La démonstration du théorème XVII tombe en défaut dans deux cas particuliers :

1° Si les trois sphères données ont leurs centres en ligne droite, on ne peut plus conclure à l'existence d'un axe radical commun. On ramène ce cas au cas général par une inversion. Alors on retrouve bien les deux familles de sphères tangentes. On reconnaît aisément que l'une des familles est constituée par des sphères obtenues en faisant tourner l'une d'elles autour de la ligne des centres des sphères données et l'autre par des sphères ayant leurs centres en ligne droite avec ceux des sphères données. La surface enveloppe est un tore.

2° Si les trois sphères données ont un plan radical commun, toutes les sphères qui coupent les deux premières sous les angles α et β et qui font partie d'une même famille admettent la troisième ω'' pour sphère isogonale. L'angle d'intersection de ω'' avec ces sphères reste donc invariable. S'il n'est pas égal à γ, il n'existe aucune sphère de la famille coupant les trois sphères données sous les angles donnés. Si, au contraire, l'angle invariable est égal à γ, la famille des sphères considérées est plus générale que dans le cas général et comprend des sphères ayant un plan radical commun et un plan de similitude commun, comme s'il n'y avait que deux sphères données.

Le problème qui consiste à trouver une sphère coupant quatre sphères données sous des angles donnés se résout comme le problème plan correspondant. Il admet, en général, seize solutions réelles ou imaginaires et devient impossible ou indéterminé si les quatre sphères ont un axe radical commun, et, à plus forte raison, si les quatre sphères données ont un plan radical commun.

La transformation par pôles et polaires réciproques remplace les sphères par des quadriques de révolution ayant pour foyer le centre de la sphère directrice, et l'angle d'intersection de deux sphères par l'angle constant sous lequel on voit, du foyer commun, deux points de contact du cône circonscrit commun situés dans un même plan avec le foyer. Si l'on donne à cet angle le nom d'*angle focal* des deux quadriques, on obtiendra facilement les théorèmes transformés des théorèmes précédents et la solution des problèmes correspondants. Si deux sphères sont tangentes, les quadriques correspondantes seront tangentes aussi, et l'on obtiendra, en particulier, les résultats suivants :

1° *Si une quadrique de révolution se déforme de manière à conserver un foyer invariable et à toucher constamment trois quadriques de révolution admettant le même foyer, le lieu des points de contact sur chacune de ces trois quadriques sera une conique. De plus la quadrique variable passera par deux points fixes et restera tangente à deux plans fixes.*

2° *Il existe une infinité de systèmes de deux familles conjuguées formées de quadriques de révolution confocales telles que toutes les quadriques d'une même famille passent par deux points fixes et sont tangentes à deux plans fixes. La droite qui joint les points fixes d'une famille est la droite d'intersection des plans fixes de l'autre famille. Chaque* *quadrique d'une famille est tangente à toutes les quadriques de l'autre. Le lieu des points de contact de l'une de ces quadriques avec toutes celles de l'autre famille est une conique. Les deux familles ont une surface enveloppe commune et les caractéristiques des quadriques mobiles sont des coniques.*

Des quadriques de révolution confocales sont des quadriques inscrites dans un même cône ayant le foyer commun pour sommet. Par une seconde transformation par pôles et polaires réciproques par rapport à une quadrique quelconque qui peut être imaginaire, on les transformera en quadriques passant par une conique donnée.

Donc le théorème précédent s'applique à des quadriques passant par une même conique.

Enfin, par une nouvelle transformation, on étend le théorème à des quadriques inscrites dans un cône du second ordre quelconque.

Si l'on remarque qu'une conique ou un cône circonscrit, deux points et deux plans tangents font neuf conditions, on peut énoncer les théorèmes suivants :

1° *Toutes les quadriques qui passent par une même conique ou sont inscrites dans un même cône du second degré et qui, de plus, passent par deux points fixes et sont tangentes à un plan fixe sont aussi tangentes à un deuxième plan fixe. De même, si l'on se donnait deux plans tangents et un point, toutes les quadriques passeraient par un deuxième point fixe. Le lieu des points de contact de chaque quadrique avec chaque plan fixe est une conique, et les plans tangents aux quadriques en chacun des points fixes enveloppent un cône du second ordre.*

2° *Si parmi toutes les quadriques qui passent par* *une conique donnée ou sont inscrites dans un cône du second ordre donné, on en considère trois fixes et celles qui leur sont tangentes, les quadriques variables passent par deux points fixes et sont tangentes à deux plans fixes; le lieu de leurs points de contact avec chaque plan fixe est une conique et leurs plans tangents aux deux points fixes enveloppent deux cônes de révolution.*

3° *Il existe une infinité de systèmes de deux familles conjuguées de quadriques passant toutes par une même conique ou inscrites dans un même cône de révolution et jouissant de toutes les propriétés déjà signalées.*