NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours en 1892)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 314-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__314_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1892).

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle O, une tangente PQ à ce cercle et une droite D située dans le plan du cercle.

Déterminer sur la droite D un point A tel que les tangentes menées de ce point au cercle O interceptent sur la droite PQ un segment BC de longueur donnée $2a$. Reconnaître, pour chaque solution, si le cercle donné est inscrit dans le triangle ABC ou s'il est exinscrit, soit dans l'angle A, soit dans l'un des angles B ou C.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés un ellipsoïde E, de centre O, et un cône du second ordre Q, de sommet S, on considère un trièdre $O\alpha\beta\gamma$, dont les arêtes forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde, et l'on prend le point d'intersection de chaque arête de ce trièdre avec le plan diamétral qui lui est conjugué dans le cône Q. On obtient ainsi trois points A, B, C qui déterminent un plan P.

1° Démontrer que le plan P passe par un point fixe F, quand le trièdre $O\alpha\beta\gamma$ varie.

2° Les points S et F déterminent une droite D; trouver le lieu des droites D qui passent par un point ω, lorsque le cône Q se déplace en restant égal et parallèle à un cône fixe.

3° Trouver, dans la même hypothèse, l'enveloppe G des droites D qui sont situées dans un plan donné H.

4° Trouver le lieu des foyers des courbes G, lorsque le plan H se déplace en restant parallèle à une droite donnée.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère la surface S lieu des points M dont les coordonnées rectangulaires X, Y, Z sont définies par les équations

$$X = u\cos v,$$
$$Y = u\sin v,$$
$$Z = av + \sqrt{b^2 - u^2} - b\,\mathrm{L}\,\frac{b + \sqrt{b^2 - u^2}}{u},$$

dans lesquelles u, v désignent des variables indépendantes et a, b des longueurs données.

1° Étudier brièvement les courbes (V) définies par l'équation $v = \text{const.}$; ces courbes sont planes et leur plan coupe la surface S sous un angle constant.

2° Montrer que la surface S est applicable sur une surface de révolution Σ, et indiquer le mode de correspondance entre les points des deux surfaces.

3° Un trièdre trirectangle Mxyz se meut de manière que, dans chacune de ses positions, l'arête Mz soit normale en M à la surface S et l'arête Mx tangente à la courbe (V) qui passe au sommet M. A un mouvement élémentaire du trièdre correspondent un déplacement du sommet M, dont les projections sur les arêtes Mx, My, Mz sont de la forme

$$\xi\,du + \xi_1\,dv,\quad \eta\,du + \eta_1\,dv,\quad 0,$$

et une rotation du trièdre, dont les composantes suivant les mêmes arêtes sont de la forme

$$p\,du + p_1\,dv,\quad q\,du + q_1\,dv,\quad r\,du + r_1\,dv;$$

on demande d'exprimer en fonction de u et de v les quantités

$$\xi,\quad \eta,\quad \xi_1,\quad \eta_1,$$
$$p,\quad q,\quad r,\quad p_1,\quad q_1,\quad r_1.$$

4° Déterminer les lignes de courbure de la surface S et ses rayons de courbure principaux.

5° Trouver la surface lieu des centres de courbure principaux de S : montrer que les deux nappes de ce lieu sont applicables sur une alysséide.

6° Déterminer les lignes asymptotiques de la surface S, leur courbure et leur torsion.

Composition de Mécanique rationnelle.

Un point matériel M est assujetti à se mouvoir sur une surface fixe S sous l'action d'une force P, constamment dirigée dans le plan tangent au point M ; cette force dérive d'un potentiel et sa grandeur, en chaque point, ne dépend que de la valeur u du potentiel en ce point. On suppose en outre que le point M peut décrire une infinité de courbes d'égal potentiel, pourvu qu'on lui imprime une vitesse initiale convenable.

1° Démontrer que le carré de l'élément linéaire de S peut être représenté par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{F(u)} + \frac{dv^2}{\varphi(u)},$$

les lignes $v = \text{const.}$ étant des lignes géodésiques orthogonales aux courbes d'égal potentiel.

2° En supposant que les lignes d'égal potentiel soient des courbes fermées, déterminer la forme des fonctions $F(u)$, $\varphi(u)$ de telle sorte que le point M décrive une trajectoire fermée, quelles que soient les conditions initiales où il est placé, la vitesse initiale pouvant toutefois être soumise à certaines restrictions.

Trouver l'expression de la force P qui doit alors agir sur le mobile.

3° On reconnaîtra que, parmi les surfaces qui satisfont à la question, se trouve la surface de révolution S_1 pour laquelle on a

$$ds^2 = \frac{m^8\,du^2}{4u(m^2+u)^4} + \frac{m^4 u\,dv^2}{(m^2+u)^2},$$

m désignant une longueur donnée et v l'azimut de l'élément ds par rapport à un plan méridien fixe.

Étudier la forme de la surface S_1.

Déterminer le mouvement que prendra le point M sur cette surface sous l'influence de la force P considérée aux paragraphes précédents. On suppose qu'à l'instant initial le mobile est sur le parallèle correspondant à $u = 2m^2$ et que sa vitesse est tangente à ce parallèle.

Calculer la pression que, dans ce mouvement, le point M exercera sur la surface S_1.