J. de Séguier

Sur la série de Fourier

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 299-301

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__299_1>

SUR LA SÉRIE DE FOURIER;

PAR J. DE SÉGUIER, S. J.
Professeur à l'Université d'Angers.

Considérons la série

$$S = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}}}{\omega} \int_{u_0}^{u_0+\omega} f(u) e^{-\frac{2ni\pi u}{\omega}} du,$$

u, u_0, ω étant des grandeurs complexes, $f(u)$ une fonction telle que l'intégrale du terme général prise suivant un chemin rectiligne ait un sens, enfin z étant pris sur le chemin d'intégration.

Posons $u = u_0 + \omega t$, $z = u_0 + \omega\zeta$; t, ζ seront réels et l'on aura

$$S = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^1 f(u_0 + \omega t)\, e^{2ni\pi(\zeta - t)}\, dt.$$

Soit alors

$$S_k = \sum_{n=-k}^{n=+k} \int_0^1 \varphi(t)\, e^{2ni\pi(\zeta-t)}\, dt, \quad \varphi(t) = f(u_0 + \omega t).$$

Les exponentielles formant une progression géométrique, on obtient

$$S_l = \int_0^1 \varphi(t) \frac{\sin(2l+1)\pi(t-\zeta)}{\sin\pi(t-\zeta)}\,dt,$$

$$S = \lim_{l=\infty} S_l,$$

et l'on est ramené à des intégrales de Dirichlet.

Si $\varphi(t)$ n'a pour $0 \leq t \leq 1$ d'autres discontinuités que des changements brusques de valeur (en restant finie), ou des pôles α tels que $\int^{\alpha} \varphi(t)\,dt$ reste finie quand t tend vers α par des valeurs supérieures ou inférieures à α et que la partie (réelle ou imaginaire, ou les deux parties) de $\varphi(t)$ qui devient infinie ait le même signe pour $t = \alpha + \varepsilon$, $t = \alpha - \varepsilon$, on a : pour toute valeur de ζ différente de 0 et 1 où la fonction φ est continue,

$$S = \varphi(\zeta) = f(z),$$

pour toute valeur $\zeta = \alpha$ où la fonction est discontinue

$$S = \tfrac{1}{2}[\varphi(\alpha - 0) + \varphi(\alpha + 0)],$$

enfin, pour $\zeta = 0$ ou $\zeta = 1$

$$S = \tfrac{1}{2}[\varphi(0) + \varphi(1)] = \tfrac{1}{2}[f(u_0) + f(u_0 + \omega)] \tag{1}$$

(*voir*, par exemple, le cours de M. Picard, tome I).

Du développement précédent, en posant $e^{\frac{2i\pi z}{\omega}} = v$, on déduit évidemment un développement de Laurent pour une fonction de v qui serait holomorphe en $\log v$.

Enfin, si $f(z)$ a la période ω, comme on peut, en restant dans une région où $f(z)$ est holomorphe, déplacer parallèlement à lui-même le segment d'intégration, on retrouve ainsi le développement de Fourier et celui de Laurent tels qu'ils se déduisent par la voie ordinaire du théorème de Cauchy.

Voici, pour terminer, deux exemples [1] où $u_0 = 0$, $\omega = 1$

$$\frac{e^{2mz\pi i w}}{1 - e^{2m\pi i w}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{2nz\pi i}}{n - mw}, \qquad 0 < z < 1$$

$$z^2 - z + \tfrac{1}{6} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{2nz\pi i}}{n^2}, \qquad 0 \leqq z \leqq 1$$

Dans le second développement, la variable z peut atteindre les extrémités du segment, car

$$f(u_0) = f(u_0 + \omega) = \tfrac{1}{2}[f(u_0) + f(u_0 + \omega)].$$

On peut sur le premier vérifier directement la formule (1) d'après le développement connu de la cotangente.