WORONTZOFF

Sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 291-299

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__291_1>

SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. WORONTZOFF.

Soient

$$
(1) \quad \left\{
\begin{array}{l}
F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\
f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0, \\
\qquad\qquad (m \leqq n)
\end{array}
\right.
$$

deux équations algébriques dont les racines sont respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$. En posant, pour abréger,

$$(2)\qquad a_0 r^p + a_1 r^{p-1} + \ldots + a_{p-1} r + a_p = \mathrm{F}_p(r),$$

$$(3)\qquad b_0 r^q + b_1 r^{q-1} + \ldots + b_{q-1} r + b_q = f_q(r),$$

$$\mathrm{F}_0(r)x^{n-1} + \mathrm{F}_1(r)x^{n-2} + \ldots + \mathrm{F}_{n-2}(r)x + \mathrm{F}_{n-1}(r) = \Phi(x, r),$$

$$f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \ldots + f_{m-2}(r)x + f_{m-1}(r) = \varphi(x, r),$$

au moyen des formules

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(r) &= (x-r)\Big[a_0 \frac{(x^n - r^n)}{x-r} + a_1 \frac{(x^{n-1} - r^{n-1})}{x-r} + \ldots \\
&\qquad + a_{n-2}\frac{(x^2 - r^2)}{x-r} + a_{n-1}\Big]\text{(1)} \\
&= (x-r)[\mathrm{F}_0(r)x^{n-1} + \mathrm{F}_1(r)x^{n-2} + \ldots \\
&\qquad + \mathrm{F}_{n-2}(r)x + \mathrm{F}_{n-1}(r)] \\
&= (x-r)\,\Phi(x, r), \\
f(x) - f(r) &= (x-r)[f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \ldots \\
&\qquad + f_{m-2}(r)x + f_{m-1}(r)] \\
&= (x-r)\,\varphi(x, r),
\end{aligned}$$

on obtient, pour toutes les valeurs de x et de r,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(r)}{f(x) - f(r)} \\
&\quad = \frac{\mathrm{F}_0(r)x^{n-1} + \mathrm{F}_1(r)x^{n-2} + \ldots + \mathrm{F}_{n-2}(r)x + \mathrm{F}_{n-1}(r)}{f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \ldots + f_{m-2}(r)x + f_{m-1}(r)} \\
&\quad = \frac{\Phi(x, r)}{\varphi(x, r)}
\end{aligned}\right.$$

ou

$$(5)\qquad \mathrm{F}(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = \mathrm{F}(r)\varphi(x, r) - f(r)\Phi(x, r),$$

ou, en comparant les coefficients des mêmes puissances

---

(1) Ou

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(r) = (x-r)\,\mathrm{F}'(r) + \frac{(x-r)^2}{1.2}\mathrm{F}''(r) + \ldots + \frac{(x-r)^n}{1.2\ldots n}\mathrm{F}^{(n)}(r).$$

de x, dans les deux membres de l'égalité précédente (5),

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a_0[-f_0(r)] + b_0 F_0(r) = 0, \\
& a_1[-f_0(r)] + a_0[-f_1(r)] + b_1 F_0(r) + b_0 F_1(r) = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=0}^{k=h} a_{h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=h} b_{h-k} F_k(r) = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{m-1-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m-1} b_{m-1-k} F_k(r) = 0, \\
& \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{m-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k} F_k(r) = F_0(r) f(r), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{m+i-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k} F_{i+k}(r) = F_i(r) f(r), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{n-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m-1} b_{m-k} F_{n-m+k}(r) \\
& \qquad = F_{n-m}(r) f(r) - f_0(r) F(r), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=h}^{k=m-1} a_{n+h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=h}^{k=m-1} b_{m+h-k} F_{n-m+k}(r) \\
& \qquad = F_{n-m+h}(r) f(r) - f_h(r) F(r), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& a_n[-f_{m-2}(r)] + a_{n-1}[-f_{m-1}(r)] \\
& \qquad + b_m F_{n-2}(r) + b_{m-1} F_{n-1}(r) \\
& \qquad = f(r) F_{n-2}(r) - f_{m-2}(r) F(r), \\
& a_n[-f_{m-1}(r)] + b_m F_{n-1}(r) \\
& \qquad = F_{n-1}(r) f(r) - f_{m-1}(r) F(r),
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1; \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-m-1.$$

Si les équations données (1) ont une racine commune et si $x_1 = x'_1 = r$ est cette racine, on aura alors, dans la formule (5), quel que soit x,

$$F(r) = 0, \qquad f(r) = 0,$$
$$F(r)\,\varphi(x, r) = 0, \qquad f(r)\,\Phi(x, r) = 0,$$
$$F(r)\,\varphi(x, r) - f(r)\,\Phi(x, r) = 0,$$
$$F(x)\,\varphi(x, r) - f(x)\,\Phi(x, r) = 0;$$

ou, dans les équations (6),

$$(7) \qquad F(r) = 0, \qquad f(r) = 0;$$

$$(8) \quad \left\{\begin{array}{llll} F(r) = 0, & r\,F(r) = 0, & \ldots & r^{m-1}\;F(r) = 0, \\ f(r) = 0, & r\,f(r) = 0, & \ldots, & r^{n-1}\;f(r) = 0, \\ f(r) = 0, & r\,f(r) = 0, & \ldots, & r^{n-m-1} f(r) = 0, \end{array}\right.$$

$$(9) \quad \left\{\begin{array}{l} F_0(r)\,r^{n-m} f(r) - f_0(r)\,F(r) = 0, \\ F_1(r)\,r^{n-m} f(r) - f_1(r)\,F(r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{m-1}(r)\,r^{n-m} f(r) - f_{m-1}(r)\,F(r) = 0; \end{array}\right.$$

et

$$(10) \quad \left\{\begin{array}{l} a_0[-f_0(r)] + b_0\,F_0(r) = 0, \\ a_1[-f_0(r)] + a_0[-f_1(r)] + b_1\,F_0(r) + b_0\,F_1(r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=h} a_{h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=h} b_{h-k}\,F_k(r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=m-1} a_{m+i-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k}\,F_{i+k}(r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\sum_{k=h}^{k=m-1} a_{n+h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=h}^{k=m-1} b_{m+h-k}\,F_{n-m+k}(r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n[-f_{m-2}(r)] + a_{n-1}[-f_{m-1}(r)] \\ \quad + b_m\,F_{n-2}(r) + b_{m-1}\,F_{n-1}(r) = 0, \\ a_n[-f_{m-1}(r)] + b_m\,F_{n-1}(r) = 0. \end{array}\right.$$

ou

$$h = 0,\ 1,\ 2, \ldots, m-1; \qquad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-m-1.$$

Réciproquement, si l'on suppose, dans la formule (5), pour toutes les valeurs de x,

$$(11) \qquad \mathrm{F}(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$(12) \qquad \mathrm{F}(r)\varphi(x, r) - f(r)\Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$(13) \qquad \mathrm{F}(r)\varphi(x, r) = 0, \qquad f(r)\Phi(x, r) = 0,$$

ou enfin

$$(14) \qquad \mathrm{F}(r) = 0, \qquad f(r) = 0,$$

les équations proposées (1) auront alors une racine commune r. Considérons séparément chacune des quatre conditions précédentes (11), (12), (13), (14).

1° Soit

$$(11) \qquad \mathrm{F}(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$\mathrm{F}(x)\varphi(x, r) = f(x)\Phi(x, r):$$

en mettant les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au lieu de x dans cette dernière égalité, on voit que $f(x) = 0$ admet au moins une racine de $\mathrm{F}(x) = 0$, puisque l'équation $\Phi(x, r) = 0$, qui est du degré $n-1$, n'a que $n-1$ racines; donc les équations $\mathrm{F}(x) = 0$, $f(x) = 0$, ont une racine commune, par exemple, $x_1 = x'_1$; alors, comme

$$\begin{aligned}\Psi(x_1) &= \mathrm{F}(x)\varphi(x, x_1) - f(x)\Phi(x, x_1) \\ &= \mathrm{F}(x_1)\varphi(x, x_1) - f(x_1)\Phi(x, x_1) = 0,\end{aligned}$$

on a

$$\Psi(r) - \Psi(x_1) = 0.$$

et par conséquent

$$r = x_1 = x'_1.$$

Maintenant, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, dans l'identité (11), on obtient le système de $m+n$ équations (10) du premier degré, à $m+n$ inconnues,

$$\begin{array}{cccc} -f_0(r), & -f_1(r), & \ldots. & -f_{m-1}(r), \\ F_0(r), & F_1(r), & \ldots. & F_{n-1}(r). \end{array}$$

Le déterminant égalé à zéro de ce système (10) sera la résultante des équations proposées $F(x)=0$ et $f(x)=0$ (méthode de Bézout et d'Euler).

2° Si l'on suppose, dans la formule (5),

$$(12) \qquad F(r)\varphi(x, r) - f(r)\Phi(x, r) = 0,$$

alors on a aussi

$$F(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = 0,$$

et, par suite,

$$r = x_1 = x'_1.$$

En substituant les expressions de $F_p(r)$ et de $f_q(r)$ (2) et (3), dans les équations (10), ou en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, dans l'identité (12), on trouve, dans le cas où $m=n$,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(r)f(r) - f_0(r)F(r) \\ \quad = A_{1,1}r^{n-1} + A_{2,1}r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,1}r + A_{n,1}r^0 = 0, \\ F_1(r)f(r) - f_1(r)F(r) \\ \quad = A_{1,2}r^{n-1} - A_{2,2}r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,2}r + A_{n,2}r^0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{n-1}(r)f(r) - f_{n-1}(r)F(r) \\ \quad = A_{1,n}r^{n-1} + A_{2,n}r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,n}r + A_{n,n}r^0 = 0, \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} A_{j,k} &= a_{j-1}b_k - b_{j-1}a_k + A_{j-k,k+1} \\ &= a_{j-1}b_k - b_{j-1}a_k + a_{j-2}b_{k+1} + \ldots \\ &\qquad + a_0 b_{k+j-1} - b_0 a_{k+j-1} = A_{k,j}, \end{aligned}$$

et, dans le cas où $m < n$,

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&F_0(r)f(r) = 0,\\
&F_1(r)f(r) = 0,\\
&\ldots\ \ldots\ldots\ldots\\
&F_{n-m-1}(r)f(r) = 0\\
&F_{n-m}(r)f(r) - f_0(r)F(r) = 0,\\
&F_{n-m+1}(r)f(r) - f_1(r)F(r) = 0,\\
&\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_{n-1}(r)f(r) - f_{m-1}(r)F(r) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

ou, plus simplement,

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&f(r) = b_0 r^m + b_1 r^{m-1} + \ldots + b_{m-1} r + b_m r^0 = 0,\\
&rf(r) = b_0 r^{m+1} + b_1 r^m + \ldots + b_{m-1} r^2 + b_m r = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r^{n-m-1} f(r) = b_0 r^{n-1} + b_1 r^{n-2} + \ldots\\
&\qquad\qquad + b_{m-1} r^{n-m} + b_m r^{n-m-1} = 0,\\
&F_0(r) r^{n-m} f(r) - f_0(r) F(r)\\
&\quad = A_{1,1} r^{n-1} + A_{2,1} r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,1} r + A_{n,1} r^0 = 0,\\
&F_1(r) r^{n-m} f(r) - f_1(r) F(r)\\
&\quad = A_{1,2} r^{n-1} + A_{2,2} r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,2} r + A_{n,2} r^0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&F_{m-1}(r) r^{n-m} f(r) - f_{m-1}(r) F(r)\\
&\quad = A_{1,m} r^{n-1} + A_{2,m} r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,m} r + A_{n,m} r^0 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les résultantes des équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, dans les cas considérés, s'obtiennent, comme on sait, en égalant à zéro les déterminants des systèmes (15) et (17) (méthode abrégée de Bézout).

3° Si l'on a, pour toutes les valeurs de x,

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&F(r)\varphi(x, r)\\
&\quad = F(r)[f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \ldots + f_{m-1}(r)] = 0,\\
&f(r)\Phi(x, r)\\
&\quad = f(r)[F_0(r)x^{n-1} + F_1(r)x^{n-2} + \ldots + F_{n-1}(r)] = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}(x)\,\varphi(x,r)-f(x)\,\Phi(x,r)\\&\quad=\mathrm{F}(r)\,\varphi(x,r)-f(r)\,\Phi(x,r)=0,\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$r=x_1=x'_1.$$

En égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, dans les égalités (13), on trouve $n+m$ équations linéaires, à $n+m$ inconnues : r^0, r, r^2, ..., r^{n+m-1},

$$(18)\quad\left\{\begin{array}{lll}&f_0(r)\,\mathrm{F}(r)=0, & f_1(r)\,\mathrm{F}(r)=0,\\ f_2(r)\,\mathrm{F}(r)=0, & \ldots, & f_{m-1}(r)\,\mathrm{F}(r)=0,\\ &\mathrm{F}_0(r)f(r)=0, & \mathrm{F}_1(r)f(r)=0,\\ \mathrm{F}_2(r)f(r)=0, & \ldots, & \mathrm{F}_{n-1}(r)f(r)=0\ (^1),\end{array}\right.$$

ou, plus simplement,

$$(19)\quad\left\{\begin{array}{lll}&\mathrm{F}(r)=0, & r\,\mathrm{F}(r)=0,\\ r^2\,\mathrm{F}(r)=0, & \ldots, & r^{m-1}\,\mathrm{F}(r)=0,\\ &f(r)=0, & rf(r)=0,\\ r^2f(r)=0, & \ldots, & r^{n-1}f(r)=0;\end{array}\right.$$

le déterminant égalé à zéro des équations (19) sera la résultante cherchée. Il est facile de voir que les lignes horizontales de ce déterminant sont les colonnes verticales de celui qui correspond aux équations (10) (méthode de M. Sylvester).

4° Enfin, supposons

$$(14)\qquad \mathrm{F}(r)=0,\qquad f(r)=0:$$

comme, en vertu de la formule (4),

$$\begin{aligned}&b_0^n[\mathrm{F}(x'_1)-\mathrm{F}(r)][\mathrm{F}(x'_2)-\mathrm{F}(r)]\ldots[\mathrm{F}(x'_m)-\mathrm{F}(r)]\\&\quad=(-1^m)\,b_0^{n-1}\,\Phi(x'_1,r)\,\Phi(x'_2,r)\ldots\Phi(x'_m,r)f(r),\end{aligned}$$

(1) Il est évident que, si l'on prend les systèmes (16) et (17), on introduira des facteurs étrangers dans les résultantes des équations données (1).

et aussi

$$a_0^m[f(x_1)-f(r)][f(x_2)-f(r)]\ldots[f(x_n)-f(r)]$$
$$=(-1^n)\,a_0^{m-1}\,\varphi(x_1,r)\,\varphi(x_2,r)\ldots\varphi(x_n,r)\,F(r),$$

on a la résultante des équations données $F(x)=0$, $f(x)=0$,

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} b_0^n F(x'_1)\,F(x'_2)\ldots F(x'_m)=0, \\ \quad\text{ou} \\ a_0^m f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)=0. \end{array}\right.$$